Problema 3: Poliedros regulares en dimensiones mayores que tres

M.J. de la Puente

Definición: en dimensión $n = 3$, el poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^3$ es **regular** si

1. las caras (2–dimensionales) de P son polígonos regulares, todos iguales, y
2. para cada vértice V de P, los extremos de las aristas concurrentes en V forman un polígono regular, el mismo independientemente de V.

El **símbolo de Schläfli** de un poliedro regular P es $\{r_1, r_2\}$ y significa que

1. las caras (2–dimensionales) de P son polígonos regulares de r_1 lados, y
2. para cada vértice V de P, los extremos de las aristas concurrentes en V forman un polígono regular de r_2 lados, el mismo independientemente de V.

Ejemplo: Los símbolos de Schläfli de los poliedros regulares en $\mathbb{R}^3$ son:

1. $\{3, 3\}$, tetraedro
2. $\{4, 3\}$, cubo (caras cuadradas y los extremos de las aristas concurrentes en un vértice forman triángulo equilátero)
3. $\{3, 4\}$, octaedro
4. $\{5, 3\}$, dodecaedro (caras pentagonales y los extremos de las aristas concurrentes en un vértice forman triángulo equilátero)
5. $\{3, 5\}$, icosaedro.

En dimensión superior a 3, el concepto análogo a poliedro se llama **politopo**.
Definición: en dimensión n arbitraria, el politopo $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es **regular** si

1. las caras (2–dimensionales) de P son polígonos regulares de r_1 lados, y
2. para cada vértice V de P, los extremos de las aristas concurrentes en V forman un politopo regular $(n-1)$–dimensional, el mismo independientemente de V.

El **símbolo de Schläfli** de un politopo regular $P \subset \mathbb{R}^n$ es $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ y significa que

1. las caras 2–dimensionales de P son polígonos regulares de r_1 lados, y
2. para cada vértice V de P, los extremos de las aristas concurrentes en V forman un politopo regular $(n-1)$–dimensional, cuyo símbolo de Schläfli es $\{r_2, \ldots, r_n\}$, el mismo independientemente de V.

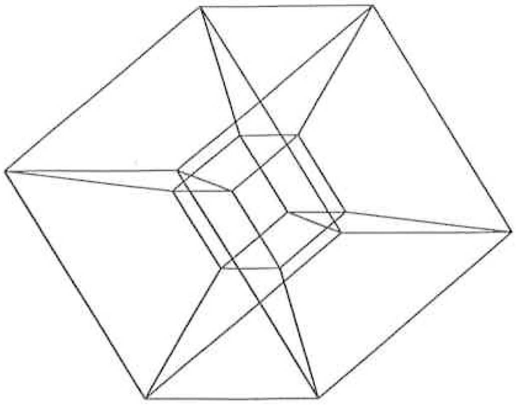
Teorema:

1. Los politopos regulares en $\mathbb{R}^4$ solo pueden tener los siguientes símbolos de Schläfli:
   a) $\{3, 3, 3\}$, simplex 4–dimensional
   b) $\{4, 3, 3\}$, cubo 4–dimensional (o hipercubo)
   c) $\{3, 3, 4\}$, dual del anterior
   d) $\{3, 4, 3\}$
   e) $\{5, 3, 3\}$
   f) $\{3, 3, 5\}$, dual del anterior
2. si $n > 4$, los politopos regulares en $\mathbb{R}^n$ solo pueden tener los siguientes símbolos de Schläfli:
   a) $\{3, 3, \ldots, 3\}$, simplex regular n–dimensional
   b) $\{4, 3, \ldots, 3\}$, cubo n–dimensional (o hipercubo)
   c) $\{3, 3, \ldots, 4\}$, dual del anterior
3. Para cada símbolo de Schläfli anterior, existe un politopo que lo posee, único salvo semejanza.

Esquema de demostración del apartado 3:
Un **simplex regular n–dimensional** está definido por las siguientes igualdades y desigualdades en $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \ldots, \quad x_{n+1} \geq 0$$

(intersección de hiperplano y octante).
Un **cubo n–dimensional** (o hipercubo) es, por ejemplo, la *envolvente convexa* de los puntos $(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$ en $\mathbb{R}^n$ (ver *Monumento a la Constitución*, Madrid).



El dual del anterior se obtiene considerando los centros de las caras $(n-1)$–dimensionales y tomando la envolvente convexa de ellos.

El símbolo de Schläfli de la *envolvente convexa* de los puntos $(\pm 2,0,0,0)$, $(0,\pm 2,0,0)$, $(0,0,\pm 2,0)$, $(0,0,0,\pm 2)\in\mathbb{R}^4$ y $(\pm 1,\pm 1,\pm 1,\pm 1)$ es $\{3,4,3\}$ (no es evidente).

Sea $\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. El símbolo de Schläfli de la *envolvente convexa* de los puntos anteriores junto con $(\pm\tau,\pm 1,\pm\tau^{-1},0)\in\mathbb{R}^4$, y todos los obtenidos por permutaciones pares de las coordenadas de estos es $\{5,3,3\}$ (no es evidente).

El dual del anterior tiene símbolo $\{3,3,5\}$.

Volvamos a dimensión 4 y consideremos vértices, aristas, caras y celdas (3–dimensionales) de un politopo regular. Diremos que un politopo regular es una **k–celda** si está acotado por k poliedros. Los seis politopos regulares son

- 5–celda, acotada por 5 tetraedros, (autodual, no central–simétrico),

- 8–celda, acotada por 8 cubos,
- 16–celda, acotada por 16 tetraedros, (dual del anterior),
- 24–celda, acotada por 24 octaedros, (autodual y central–simétrico),
- 120–celda, acotada por 120 dodecaedros,
- 600–celda, acotada por 600 tetraedros, (dual del anterior).

En dimensión $n > 4$, llamemos celdas a las caras $(n-1)$–dimensionales de un politopo regular. Los tres politopos regulares son

- $(n+1)$–celda, acotada por $n+1$ n–celdas, (autodual) (es el simplex),
- $2n$–celda, acotada por $2n$ $(2n-2)$–celdas (es el hipercubo),
- 2^n–celda, acotada por 2^n n–celdas, (dual del anterior).

Sea $0 \leq m \leq n$. El número $E_{m,n}$ de cubos m–dimensionales que hay en un cubo n–dimensional es $2^{n-m}\binom{n}{m}$ y se satisface $E_{m,n} = 2E_{m,n-1} + E_{m-1,n-1}$, con $E_{0,0} = 1$.

Referencias

[1] D. Hilbert y S. Cohn–Vossen, *Geometry and the imagination*, Chelsea, 1952

[2] V.V. Prasolov y V.M. Tikhomirov, *Geometry*, AMS, 2001