MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2016–2017
Ejercicios
Hoja 2. Raíces de ecuaciones en una variable

1. Utilizar el **método de la bisección** para aproximar una raíz de la ecuación

$$\sqrt{x}\,\operatorname{sen} x - x^3 + 2 = 0$$

en el intervalo $[1, 2]$ con un error menor que $\dfrac{1}{30}$.

2. Comprobar que se puede aplicar el **teorema del Punto Fijo** a las siguientes funciones en los intervalos dados:

(a) $f(x) = \dfrac{\cos x}{8} + \dfrac{x^2}{4}$ en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. (b) $g(x) = \dfrac{x - x^2 + 1}{5}$ en $[0, 1]$.

3. Determinar un intervalo y una función para poder aplicar el **método del Punto Fijo** a las siguientes ecuaciones:

(a) $x^3 - x - 1 = 0$. (b) $4 - x - \tan x = 0$. (c) $x = -\ln x$.

Determinar, en cada caso, un número de iteraciones suficiente para que el error cometido sea inferior a 10^{-5}.

4. Se considera la ecuación $x^2 - 1 - \operatorname{sen} x = 0$.

   (a) Probar que dicha ecuación tiene, al menos, una raíz positiva.

   (b) Encontrar un intervalo en el que la iteración

$$x_n = \sqrt{1 + \operatorname{sen} x_{n-1}},\ n \in \mathbb{N}$$

   converja, para cualquier valor inicial x_0 de dicho intervalo, a una raíz positiva de la ecuación anterior. ¿Cuántos pasos deben darse, a partir de $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, para obtener una aproximación de la raíz con un error inferior a la milésima?

5. Se considera la función

$$g(x) = \operatorname{sen}^2 x,\ x \in [0, \pi].$$

Aplicar el **teorema del Punto Fijo** a la función

$$f(x) = 2 + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$$

en el intervalo $[1{,}6, 2]$ para determinar el valor del punto ζ para el que se verifica que

$$\int_0^{\zeta} g(t)dt = 1$$

de forma que el error cometido sea inferior a 10^{-4}.

6. Sea $F : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \dfrac{x-1}{x} - e^{-x}$.

   (a) Dibujar la gráfica de F y determinar el número de raíces reales de la ecuación $F(x) = 0$, localizando cada raíz entre dos enteros consecutivos.

   (b) Para cada una de las funciones siguientes:

   $$f_1(x) = 1 + xe^{-x}, \quad f_2(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right), \quad f_3(x) = (x-1)e^{x}$$

   consideramos el siguiente método iterativo: dado $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario sea

   $$x_n = f_i(x_{n-1}),\ n \in \mathbb{N} \quad (i = 1, 2, 3).$$

   Estudiar cuáles de estas sucesiones convergen hacia alguna de las raíces de la ecuación $F(x) = 0$.

   (c) Elegir intervalos y puntos iniciales adecuados para que el **método de Newton** converja a cada una de las raíces.

7. Dados un número natural n y un número positivo α, una forma de calcular las raíces reales n–ésimas de α sin usar radicales es aplicar el **método de Newton** a la ecuación

$$x^n - \alpha = 0.$$

Encontrar un intervalo y un valor inicial para los que el método sea convergente.

8. Demostrar que la ecuación

$$e^x \ln x + x^3 - 2 = 0$$

tiene una única raíz positiva. Determinar un intervalo y un valor inicial para los que el **método de Newton** converja a dicha raíz.

9. Demostrar que la ecuación

$$\cos x - 3x = \frac{\pi}{2}$$

tiene una única raíz real. Determinar un intervalo y un valor inicial para los que el **método de Newton** converja a dicha raíz.

10. Calcular las raíces de la ecuación $x^3 - x^2 + 3x = 3$.

11. Calcular las raíces del polinomio

$$P(x) = 5x^5 - 17x^4 - 79x^3 + 269x^2 - 34x - 24.$$

12. Calcular las raíces reales de la ecuación $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 7x + 3 = 0$.

13. Dada la ecuación $x^5 + x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 13x - 10 = 0$,

    (a) Determinar el número de raíces positivas.

    (b) Encontrar una raíz racional negativa.

    (c) Hallar el número de raíces reales y complejas de la ecuación anterior.

    (d) Determinar un intervalo donde se pueda aplicar el **método de Newton** para aproximar la raíz positiva más pequeña, así como los dos primeros términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que determina dicho método.

14. (Examen Final, 3 de Febrero 2016, grupo C) Demostrar que el polinomio $P(x) = x^7 + x^4 + x^2 + 26x - 4$ tiene una única raíz ξ real positiva. Encontrar un intervalo $[a, b]$ y una función f contractiva en $[a, b]$ que permitan aproximar dicha raíz ξ por el **método de Punto Fijo**. Acotar superiormente el error absoluto $|x_3 - \xi|$, donde $x_n = f(x_{n-1})$ y $x_0 = (a + b)/2$.

15. (Convocatoria Extraordinaria, 13 de Septiembre 2016, grupo C) Sea

$$F(x) = 2 + x - \ln x - e^x, \quad x > 0.$$

Demuestra que F tiene una única raíz positiva ξ y encuentra un intervalo cerrado $[a, b]$ que la contenga y donde se pueda aproximar ξ, mediante el **método de Newton**, dando las dos primeras iteraciones x_0 y x_1.