MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2016–2017
Ejercicios
Hoja 4. Ampliación de Álgebra Lineal

1. **Factorización de Cholesky.**

   (a) Se considera una matriz A hermítica cuyos menores principales son todos positivos. Si se escribe A en la forma

   $$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & a \\ \hline a^* & \alpha \end{array}\right)$$

   siendo $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, $a \in \mathbb{C}^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, demostrar que $\alpha - a^*(A_{n-1})^{-1}a > 0$.
   (**Indicación**: usar *complemento de Schur*).

   (b) En el supuesto de que A_{n-1} admita factorización de la forma

   $$A_{n-1} = B_{n-1}(B_{n-1})^*,$$

   con B triangular inferior, ¿cómo deben elegirse $x \in \mathbb{C}^{n-1}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ para que

   $$A = \left(\begin{array}{c|c} B_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline x^* & \beta \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B_{n-1}^* & x \\ \hline \mathbf{0} & \beta \end{array}\right)?$$

   Probar que tal elección de x y β es posible.

   (c) Demostrar que para cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermítica cuyos menores principales son todos positivos, existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangular superior tal que $A = BB^*$. Además, si $b_{ii} > 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces la descomposición es única. *[Factorización de Cholesky]*.

   (d) Demostrar que toda matriz hermítica con menores principales positivos es definida positiva. *[Versión compleja del Criterio de Sylvester]*.

   (e) Demostrar que toda matriz hermítica definida positiva es diagonalizable con matriz de paso unitaria.

   (f) ¿Cuántas factorizaciones de Cholesky distintas (es decir, sin suponer que los elementos diagonales de B son positivos) admite una matriz hermítica definida positiva?

2. Probar que la factorización de Cholesky preserva la estructura de matrices banda, es decir, si $a_{ij} = 0$ para $|i - j| \geq p$ entonces $b_{ij} = 0$ para $i - j \geq p$.

3. **Cálculo recursivo de la inversa de una matriz**.

   (a) **Fórmula de Sherman–Morrison**. Sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible y sean $u, v \in \mathbb{C}^n$ tales que la matriz $B + uv^*$ es inversible. Comprobar que
$$(B + uv^*)^{-1} = B^{-1} - \frac{B^{-1}uv^*B^{-1}}{1 + v^*B^{-1}u}.$$
   [Observación: el denominador $1 + v^*B^{-1}u$ no se anula, al ser autovalor de cierta matriz inversible. Encuentra dicha matriz]

   (b) Sean $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz arbitraria y $D = \mathrm{diag}(A)$. Demostrar que A se puede escribir en la forma
$$A = D + \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i^*$$
   siendo $\mathbf{e}_i$ el i–ésimo vector de la base canónica, y u_i la columna i–sima de A *agujereada*, es decir, u_i es igual a la columna i–sima de A, salvo en la entrada i, que vale cero.

   (c) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible con entradas diagonales son no nulas y sea $A_k = D + \sum_{i=1}^{k} u_i \mathbf{e}_i^*$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Encontrar una fórmula recurrente para A_k^{-1} y obtener una expresión para A^{-1}.

4. **Método iterativo para el cálculo de la inversa de una matriz**. Se consideran las sucesiones de matrices
$$A_n = A_{n-1}(I + E_n + E_n^2) \text{ y } E_n = I - AA_{n-1}$$
   siendo A inversible y A_0 una matriz arbitraria.

   (a) Demostrar que $E_n = (E_1)^{3^{n-1}}$.

   (b) Probar que si $\varrho(E_1) < 1$ entonces $\lim_{n\to+\infty} A_n = A^{-1}$.

   (c) Estudiar la convergencia cuando se toma $A_0 = \dfrac{A^*}{tr(AA^*)}$.

5. **Algoritmo para la resolución de sistemas tridiagonales**. Se considera el sistema lineal $Ax = d$ para una matriz tridiagonal
$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

(a) Llamando $\delta_0 = 1$ y δ_k al *menor principal* de orden k de A ($k = 1, 2, \ldots, n$) probar que

$$\delta_k = b_k \delta_{k-1} - a_k c_{k-1} \delta_{k-2}, \; k = 2, 3, \ldots, n.$$

(b) Definimos las sucesiones

$$\begin{cases} m_1 = b_1 \\ m_k = b_k - \dfrac{c_{k-1}}{m_{k-1}} a_k, \; k = 2, 3, \ldots, n \end{cases} \text{ y } \begin{cases} g_1 = \dfrac{d_1}{m_1} \\ g_k = \dfrac{d_k - g_{k-1} a_k}{m_k}, \; k = 2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

Por inducción, probar que $m_k = \dfrac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$ y deducir que si $\delta_k \neq 0, \; k = 1, 2, \ldots, n$ entonces $m_k \neq 0$. Por tanto, los números m_k y g_k están bien definidos.

(c) Demostrar que la solución del sistema viene dada por

$$x_n = g_n \text{ y } x_k = g_k - \frac{c_k}{m_k} x_{k+1}, \; k = n-1, n-2, \ldots, 1$$

(y no es necesario calcular los δ_k).