MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2016–2017
Ejercicios
Hoja 6. Interpolación e integración numéricas

1. Hallar el polinomio P que interpola la función $f(x) = \cos \pi x$ en los puntos $\left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$.

2. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ puntos distintos del intervalo $[a,b]$. Si P y Q son, respectivamente, los polinomios de interpolación de f y g en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   a) ¿Es $\alpha P + \beta Q$ el polinomio de interpolación de $\alpha f + \beta g$ en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$?

   b) ¿Es PQ el polinomio de interpolación de fg en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$?

3. Sean $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ puntos distintos. Demostrar:

   a) $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1, \ x \in \mathbb{R}$.

   b) $E_n(x) = \sum_{i=0}^{n} [f(x) - f(x_i)]L_i(x)$, donde $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ es el error.

4. Sean P polinomio de grado menor o igual que n y $n+1$ puntos distintos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Hallar el valor de $P[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

5. Sean $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ puntos distintos y $f(x) = x^{n+1}$. Calcular el polinomio de interpolación de f. ¿Cual es su término independiente?

6. Demostrar que si $f \in \mathcal{C}([a,b])$ y existe $f'(x_i)$ para algún $x_i \in [a,b]$ entonces la función

$$g(x) = \begin{cases} f[x, x_i] & \text{si} \quad x \neq x_i \\ f'(x_i) & \text{si} \quad x = x_i \end{cases}$$

   es continua en el intervalo $[a,b]$ (esto permite definir la diferencia dividida $f[x, x_i]$ en todo punto del intervalo). ¿Tiene $f[x, x_i]$ alguna propiedad similar a $(\varphi\psi)' = \varphi'\psi + \varphi\psi'$?

7. Sea $a > 0$, $\{-x_n, -x_{n-1}, \ldots, -x_1, 0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [-a, a]$ y P_{2n} el polinomio de interpolación de $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ en estos puntos. Demostrar:

a) Si f es una función par (resp. impar) entonces P_{2n} es par (resp. impar).

b) Si f es par existe Q_n, polinomio de grado menor o igual que n, tal que $P_{2n}(x) = Q_n(x^2)$. ¿Quién es Q_n?

8. Determinar los valores de λ y μ para que

$$S(x) = \begin{cases} \lambda x(x^2+1), & 0 \le x \le 1 \\ -\lambda x^3 + \mu x^2 - 5\lambda x + 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

sea una función spline cúbica.

9. Determinar los parámetros reales a, b, c, d, e para que la función

$$S(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3, & x \in [0,1] \\ c(x-2)^2, & x \in [1,3] \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3, & x \in [3,4] \end{cases}$$

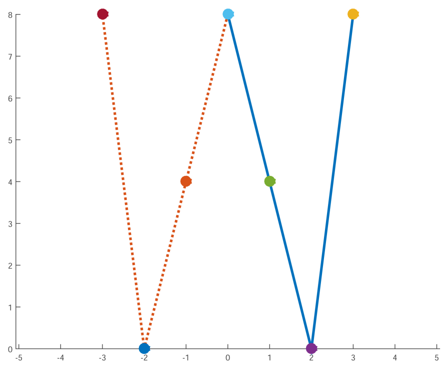
sea spline cúbica interpoladora para la tabla

x_i	0	1	3	4
y_i	26	7	7	25.

a) Hallar el polinomio de interpolación P_3 asociado a la tabla anterior.

b) Hacer una representación gráfica de las funciones S y P_3.

c) Hallar valores aproximados de $f'(2)$, $f''(2)$, $f'''(2)$, donde $f(x_i) = y_i$, usando S o usando P_3.



10. (Septiembre 2015/16) Determina la función spline cúbica

$$S(x) = \begin{cases} b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3, & x \in [-3,0], \\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, & x \in [0,3] \end{cases}$$

que interpola la letra W de la figura en los puntos señalados. ¿Es única?

11. Calcula el polinomio de interpolación P_6 para la nube de puntos de la gráfica anterior. [Indicación: usa el ejercicio 7].

12. Aplicar la regla de Simpson compuesta a la integral

$$\int_1^x \frac{dt}{t}$$

para obtener una aproximación del logaritmo neperiano de 2 determinando el número m de subintervalos necesario para que el error cometido en esa aproximación sea inferior a 10^{-3}.

13. Se considera la fórmula de integración

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq A(f(x_0) + f(x_1)).$$

Hallar el valor de A, x_0 y x_1 para que la fórmula sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

14. Encontrar un fórmula que aproxime $\int_1^3 f(x)\,dx$ utilizando los valores de f en los puntos $0,\ 2$ y 4 y que sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

15. Dado $n \in \mathbb{N}$ se considera $h = \dfrac{1}{n}$, $x_i = ih$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ y la función

$$f_n(x) = x^n \cos(2\pi n x).$$

Hallar el valor de la aproximación de $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ que se obtiene utilizando la fórmula de Newton–Côtes cerrada de $n+1$ puntos.

16. Hallar el valor de la aproximación que se obtiene al calcular

$$\int_{-4}^{4} |x-2|^3 (1 - \operatorname{sen} \pi x)\,dx$$

mediante la regla de Simpson para 4 subintervalos.

17. Hallar la aproximación que se obtiene de $\int_a^b f(x)\,dx$ cuando se considera la integral de la interpolación lineal a trozos de f en una partición equiespaciada.