REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA
ESPAÑOLA

XLIII Olimpiada Matemática Española
Torrelodones, 22-25 de marzo de 2007

Primera sesión

Viernes, 23 de marzo de 2007

Problema 1.

Sean a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 cinco números positivos en progresión aritmética de razón d. Probar que

$$a_2^3 \leq \frac{1}{10}\left(a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3\right).$$

Problema 2.

Determinar todos los posibles valores enteros no negativos que puede tomar la expresión

$$\frac{m^2 + mn + n^2}{mn - 1},$$

siendo m y n enteros no negativos tales que $mn \neq 1$.

Problema 3.

Sea O el circuncentro de un triángulo ABC. La bisectriz que parte de A corta al lado opuesto en P.
Probar que se cumple:

$$AP^2 + OA^2 - OP^2 = bc$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

XLIII Olimpiada Matemática Española

Torrelodones, 22-25 de marzo de 2007

Segunda sesión

Sábado, 24 de marzo de 2007

Problema 4.

¿Cuáles son los números enteros positivos que se pueden obtener de exactamente 2007 maneras distintas, como la suma de al menos dos números enteros positivos consecutivos? ¿Cuál es el menor de todos ellos?

Ejemplo: el número 9 se escribe exactamente de dos maneras distintas:
$9 = 4 + 5$
$9 = 2 + 3 + 4$

Problema 5.

Sea $a \neq 1$ un número real positivo y n un entero positivo. Demostrar que

$$n^2 < \frac{a^n + a^{-n} - 2}{a + a^{-1} - 2}.$$

Problema 6.

Dada una semicircunferencia de diámetro $AB = 2R$, se considera una cuerda CD de longitud fija c. Sea E la intersección de AC con BD y F la intersección de AD con BC.
Probar que el segmento EF tiene longitud constante y dirección constante al variar la cuerda CD sobre la semicircunferencia.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.