

### Primera sesión

Viernes, 23 de marzo de 2007

#### Problema 1.

Sean  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  cinco números positivos en progresión aritmética de razón  $d$ . Probar que

$$a_2^3 \leq \frac{1}{10} (a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3).$$

#### Problema 2.

Determinar todos los posibles valores enteros no negativos que puede tomar la expresión

$$\frac{m^2 + mn + n^2}{mn - 1},$$

siendo  $m$  y  $n$  enteros no negativos tales que  $mn \neq 1$ .

#### Problema 3.

Sea  $O$  el circuncentro de un triángulo  $ABC$ . La bisectriz que parte de  $A$  corta al lado opuesto en  $P$ .

Probar que se cumple:

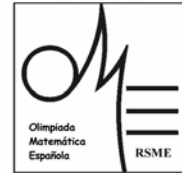
$$AP^2 + OA^2 - OP^2 = bc$$

**No está permitido el uso de calculadoras.**  
**Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.**  
**El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.**



REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA  
ESPAÑOLA

XLIII Olimpiada Matemática Española  
Torrelodones, 22-25 de marzo de 2007



## Segunda sesión

Sábado, 24 de marzo de 2007

### Problema 4.

¿Cuáles son los números enteros positivos que se pueden obtener de exactamente 2007 maneras distintas, como la suma de al menos dos números enteros positivos consecutivos? ¿Cuál es el menor de todos ellos?

Ejemplo: el número 9 se escribe exactamente de dos maneras distintas:

$$9 = 4 + 5$$

$$9 = 2 + 3 + 4$$

### Problema 5.

Sea  $a \neq 1$  un número real positivo y  $n$  un entero positivo. Demostrar que

$$n^2 < \frac{a^n + a^{-n} - 2}{a + a^{-1} - 2}.$$

### Problema 6.

Dada una semicircunferencia de diámetro  $AB = 2R$ , se considera una cuerda  $CD$  de longitud fija  $c$ . Sea  $E$  la intersección de  $AC$  con  $BD$  y  $F$  la intersección de  $AD$  con  $BC$ .

Probar que el segmento  $EF$  tiene longitud constante y dirección constante al variar la cuerda  $CD$  sobre la semicircunferencia.

No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.