Problemas de Topología (Hoja 1)

1-III-07

1. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha), \alpha \in A\}$ una familia arbitraria de espacios topológicos y sea $M_\alpha \subseteq X_\alpha$ para cada $\alpha \in A$. En el producto $\prod\limits_{\alpha \in A} M_\alpha$ se pueden considerar dos topologías

   a) como producto de subespacios

   b) como subespacio del producto.

   Probar que ambas coinciden.

2. Sea $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ un espacio producto.

   a) Si $(\xi_\alpha) \in \prod X_\alpha$ es un punto fijo, y $H := \left\{ (x_\alpha) \in \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \text{ tal que } x_\alpha = \xi_\alpha, \text{ para casi todo } \alpha \right\}$, hallar la clausura de H en $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ con la topología producto.

   b) Probar que $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ es conexo si y sólo si cada espacio factor es conexo.
   Indicación: tomar un punto fijo $(\xi_\alpha) \in \prod X_\alpha$ y considerar los subespacios $S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \left\{ (x_\alpha) \in \prod\limits_{\alpha \in A} \text{ tal que } x_\alpha = \xi_\alpha, \ \forall \alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n \right\}$.

3. Probar que un espacio producto es Hausdorff o regular si y solo si cada espacio factor es respectivamente Hausdorff o regular.

4. Sea X un conjunto no vacío y $\{\tau_i, i \in I\}$ una familia de topologías en X. Demostrar que la aplicación diagonal
$$\Delta : X \to X^I$$
definida por $(\Delta x)_i = x$ para cada $i \in I$ es un homeomorfismo de $(X, \sup \tau_i)$ en $(\Delta(X), \tau_{\pi|\Delta(X)})$, donde τ_π designa la topología producto $\prod \tau_i$. Estudiar el caso particular en que todas las topologías τ_i coincidan.

5. Sea $\{(X_i, d_i), i \in \mathbb{N}\}$ una familia de espacios métricos donde d_i designa una métrica en X_i acotada por 1, $\forall i \in \mathbb{N}$. Se define en $\prod\limits_{i \in \mathbb{N}} X_i$ la distancia $d(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{d_i(x_i, y_i)}{2^i}$.
Probar que la topología asociada a la métrica d, τ_d, es precisamente la topología producto $\prod\limits_{i \in \mathbb{N}} \tau_{d_i}$.

6. Sea $\{(X_i, \tau_i),\ i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. En el conjunto producto $\prod_{i \in I} X_i$ se define la familia de subconjuntos

$$\mathcal{B} = \{\prod_{i \in I} M_i; M_i \in \tau_i, \forall i \in I\}.$$

   a) Probar que $\mathcal{B}$ es base para una topología τ_b en $\prod_{i \in I} X_i$ (topología de cajas; en inglés, box topology) y compararla con la topología producto.
   b) Probar que las proyecciones $p_j : (\prod_{i \in I} X_i, \tau_b) \to (X_j, \tau_j)$ son continuas ($\forall j \in I$).
   c) Sea $A_i \subset X_i$, $\forall i \in I$. Probar que $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$ en τ_b.
   d) Si $X_i = \mathbb{R}$ y la topología τ_i es la euclídea, ($\forall i \in I$), estudiar la clausura del conjunto
   $$H = \{(x_i) \in \mathbb{R}^I; x_i = 0 \text{ para casi todo i }\},$$
   en las topologías τ_b y τ_Π.
   e) Estudiar si la aplicación $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definida por $t \mapsto (t, t/2, t/3, ..., t/n, ...)$ es continua considerando en $\mathbb{R}$ la topología usual y en el producto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la topología de cajas.
   f) Estudiar si ϕ es continua considerando en el espacio imagen la topología producto.

7. Si X es un espacio métrico no discreto, probar que la diagonal Δ como subespacio de $X^{\mathbb{N}}$ con la topología de cajas no es homeomorfo a X.

8. Probar que todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tiene interior vacío. Sea
$$H = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}};\ \text{t. q. } p_r(x) = r, \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\},$$
donde p_r designa la proyección canónica correspondiente al índice r. ¿Tiene H interior vacío?. ¿Es H compacto?.

9. Probar que un producto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es localmente compacto si y sólo si X_α es localmente compacto para todo $\alpha \in A$ y además X_α es compacto para casi todo α.

10. Probar que un producto de espacios topológicos dotado de la topología de cajas no verifica una propiedad análoga a la enunciada en el teorema de Tychonoff.

11. Si designamos por C el discontinuo de Cantor, probar:
    - C es un subconjunto raro en el intervalo $I = [0, 1]$.
    - C es un espacio homogéneo (ésto demuestra que "ser punto extremo" no es propiedad topológica).

12. Demostrar que el producto de una cantidad numerable de espacios separables es separable.