Problemas de topología (Redes). Hoja 2

1 -III-2007

1. Probar que un espacio topológico es discreto si y solo si toda red convergente es "eventualmente" constante.

2. Sea (X, τ) espacio topológico. Probar que para un subconjunto $C \subset X$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

   i) C es cerrado.
   ii) Si $S = \{s_d, D, \leq\}$ es una red con valores en C, tal que $s_d \to x$, entonces $x \in C$.

3. Un espacio topológico (X, τ) es de *Frechet-Urysohn* si para cada subconjunto $M \subset X$ y cada punto $x \in \overline{M}$ existe una sucesión $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset M$ tal que $x_n \to x$. Probar:
   i) Si un espacio X es I-numerable, también es de Frechet-Urysohn.
   ii) Hay espacios que son de Frechet-Urysohn, pero no verifican I (primer axioma de numerabilidad).

4. Sean (X, τ) , (Y, τ') espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación cualquiera. Probar:

   f es continua en $x \in X$ si y solo si para toda red $S = \{s_d, D, \leq\}$ con valores en X, $S \to x$ implica $f(s_d) \to f(x)$.

5. Sea $S = \{s_d, D, \leq\}$ una red en un espacio topológico X. Probar que si la red S converge a $x \in X$, toda subred de S también converge a x.

6. Sea S una red en un espacio topológico X tal que todas sus subredes son convergentes a un mismo punto $x \in X$. Probar que la red S también converge a x.

7. Sean τ y τ' dos topologías en un conjunto X. Probar que si para todo $x \in X$ y toda red convergente en τ a x, es también convergente a x en τ', entonces $\tau' \leq \tau$. Designamos por *clase de convergencia en un espacio topológico* X a la familia de todos los pares (S, x), donde S es una red en X que converge a $x \in X$. En consecuencia: dos topologías en un conjunto X coinciden si y sólo si tienen la misma clase de convergencia.

8. Sea $(\Pi X_\alpha, \tau_\pi)$ el espacio producto de una familia de espacios topológicos (X_α, τ_α), $\alpha \in A$. Para cada α designamos por $p_\alpha : \Pi X_\beta \to X_\alpha$ la proyección canónica correspondiente. Demostrar las siguientes proposiciones:

   i) Una red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en $(\Pi X_\alpha, \tau_\pi)$ converge a $x \in (\Pi X_\alpha, \tau_\pi)$ si y solo si $(p_\alpha(x_\lambda)) \to x_\alpha$ en X_α para todo $\alpha \in A$.

ii) Si una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en $(\Pi X_\alpha, \tau_\pi)$ tiene un punto de aglomeración x, entonces las redes $(p_\alpha(x_\lambda))$ tienen a $p_\alpha(x)$ como punto de aglomeración. El recíproco no es cierto: dar un contraejemplo en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dotado de la topología usual.

9. En el espacio producto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, sea E el conjunto formado por todas aquellas funciones que toman el valor 0 para una cantidad finita de puntos $F \subset \mathbb{R}$, y el valor 1 en los puntos de $\mathbb{R}\setminus F$. Sea g la función de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ que es idénticamente nula. Probar:

   - $g \in \overline{E}$
   - No existe ninguna sucesión en E que converja a g
   - Definir una red en E que converja a g