

Problemas de topología. Hoja 3

15-III-2007

1. Hallar los filtros convergentes en un espacio discreto.
2. Probar que un espacio X es de Hausdorff si y solo si todo filtro (o equivalentemente toda red) converge a lo sumo a un punto.
3. Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea \mathcal{F} un filtro en X . Un punto $x \in X$ es *punto de aglomeración* ó *punto adherencia* de \mathcal{F} si $x \in \bigcap \{\overline{F}, F \in \mathcal{F}\}$. Probar : $x \in \text{Agl}\mathcal{F}$ si y solo si existe \mathcal{F}' filtro en X más fino que \mathcal{F} , tal que $\mathcal{F}' \rightarrow x$.
4. Sea (X, τ) un espacio topológico y $H \subset X$. Probar que un punto x está en la clausura de H si y solo si existe un filtro \mathcal{F} en X tal que $H \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \rightarrow x$.
5. Probar que la intersección de dos filtros \mathcal{F} y \mathcal{G} es el filtro generado por la familia $\mathcal{H} = \{F \cup G; F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}\}$.
6. Si \mathcal{F} es un filtro en un espacio topológico (X, τ) y x es un punto adherente de \mathcal{F} , probar que existe un ultrafiltro \mathcal{U} en X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \rightarrow x$.
7. Sean (X, τ) , (Y, τ') espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación cualquiera. Probar:
 - Si \mathcal{F} es un filtro en X , la familia de subconjuntos de Y dada por $\{f(F); F \in \mathcal{F}\}$ es base de un filtro en Y al que denominaremos $f(\mathcal{F})$.
 - Si \mathcal{F} es un ultrafiltro en X , $f(\mathcal{F})$ es un ultrafiltro en Y .
 - f es continua en $x \in X$ si y solo si $\mathcal{F} \rightarrow x$ implica $f(\mathcal{F}) \rightarrow f(x)$.
8. (del Examen 2004) En el espacio $(\mathbb{R}, T_u)^{\mathbb{R}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se considera el subconjunto

$$M_n = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) > -\frac{1}{n}, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

- a) Determinar la adherencia y el interior de M_n .
 - b) Sea \mathcal{F} el filtro generado por $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Determinar los puntos de aglomeración y convergencia de \mathcal{F} .
9. Dar un ejemplo de filtro sin puntos de adherencia.

10. (del Examen de Septiembre, 2004) Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
- 1) todo filtro convergente en X tiene un miembro compacto.
 - 2) X es localmente compacto

11. (del Examen de Julio, 2002). Sea (X, d) un espacio métrico y \mathcal{F} un filtro en X . Se dice que \mathcal{F} es de Cauchy en (X, d) si para cada $\epsilon > 0$ existe un $F \in \mathcal{F}$ tal que

$$F \times F \subset \{(x, y) \in X \times X, \quad d(x, y) < \epsilon\} =: U_\epsilon.$$

- a) Si una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, el filtro asociado también es de Cauchy.
 - b) Probar que si \mathcal{F} es un filtro de Cauchy en (X, d) , entonces \mathcal{F} converge a cada uno de sus puntos de aglomeración.
12. Sea (X, d) un espacio métrico completo y \mathcal{F} un filtro en X . Probar que \mathcal{F} converge a algún punto x de X si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe un elemento $F \in \mathcal{F}$ tal que $\text{diam } F \leq \epsilon$.

13. Sea (X, τ) un espacio topológico. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
- X es compacto.
 - Toda familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita, tiene intersección no vacía.
 - Toda red en X posee una subred convergente.
 - Toda red universal en X es convergente.
 - Todo filtro en X posee algún punto de aglomeración.
 - Todo ultrafiltro en X es convergente.