TOPOLOGÍA
CURSO 2006–2007
SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS (HOJA 4)

Ejercicio 1. Probar que "ser regular" es una propiedad hereditaria, topológica y multiplicativa. Sin embargo, un cociente de un espacio regular no es necesariamente regular.

Solución. Que "ser regular" es propiedad topológica (es decir, si X es regular e Y es homeomorfo a X, entonces Y también es regular) es obvio. Que es hereditaria y multiplicativa se vio en el ejercicio 3. de la hoja 1. Sólo queda, pues, exhibir un espacio regular y un cociente suyo que no lo sea. Tómense, por ejemplo, $X = [0, 1]$ y $A = (0, 1] \subseteq X$. Sea X/A el espacio cociente resultante de identificar entre sí todos los puntos de A, y denotemos por $\pi : X \longrightarrow X/A$ la proyección canónica, así como $[A] = \pi(A)$. El cociente X/A (que consta tan sólo de dos elementos, $\pi(0)$ y $[A]$) no es regular, porque el cerrado unipuntual $\{\pi(0)\}$ y el punto $[A]$ (que no es cerrado) no pueden separarse por abiertos: si $U \supseteq \{\pi(0)\}$ es cualquier abierto de X/A que contiene a $\pi(0)$, su preimagen $\pi^{-1}(U)$ es un abierto de $[0, 1]$ que contiene a 0, luego corta a A y por tanto U contiene a $[A]$. Así X/A no es regular (tampoco es Hausdorff).

Ejercicio 2. Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff. Probar las siguientes afirmaciones:

1. Si $x_1, \ldots, x_n \in X$ son n puntos distintos en X, cada x_k posee un entorno U_k tal que $U_1, \ldots, U_n$ son disjuntos dos a dos.

2. Si X es tal que toda familia de abiertos disjuntos dos a dos es finita, entonces X es finito.

Solución. (1) Por inducción sobre n. Para $n = 2$ es la definición de ser Hausdorff. Supongamos que el resultado es cierto para n puntos, y veámoslo para $n+1$ puntos $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Por hipótesis existen entornos $U_1, \ldots, U_n$ de $x_1, \ldots, x_n$ que son disjuntos dos a dos. Ahora, como X es Hausdorff, para cada $1 \le k \le n$ podemos separar x_k y x_{n+1} mediante entornos V_k y W_k. Poniendo $O_k := U_k \cap V_k$ para $1 \le k \le n$ y $O_{n+1} := \bigcap_{k=1}^{n} W_k$ obtenemos entornos de $x_1, \ldots, x_{n+1}$ disjuntos dos a dos.

(2) Probemos primero la siguiente afirmación: (A) si X es infinito, existen dos abiertos disjuntos U y V tales que U es infinito. En efecto, sean $x \neq y$ dos puntos distintos de X (existen porque X es infinito). Separémoslos por entornos abiertos disjuntos $x \in W_x$ e $y \in W_y$. Si alguno es infinito (por ejemplo, W_x) tomamos $U = W_x$, $V = W_y$ y hemos terminado. Si no, W_x es finito. Como X es Hausdorff (en particular T_1) los puntos son cerrados, luego W_x, que es unión finita de puntos, es cerrado. Tomando $U = X - W_x$ (que es infinito porque X lo es) y $V = W_x$ se tienen dos abiertos que satisfacen lo requerido.

Para terminar el ejercicio bastará demostrar que si X es infinito, contiene una sucesión de abiertos no vacíos disjuntos dos a dos. Utilizando (A) podemos hallar U_0 y V_0 abiertos (en X) disjuntos no vacíos, el primero de ellos infinito. Nuevamente por (A), aplicado al espacio Hausdorff e infinito U_0, obtenemos U_1 y V_1 abiertos (en U_0, y por tanto en X) disjuntos no vacíos, el primero de ellos infinito. Repitiendo este proceso se obtiene una sucesión $V_0, V_1, V_2, \ldots$ de abiertos no vacíos de X, todos ellos disjuntos entre sí.

Ejercicio 5. (Examen de 1999) Sean X un espacio regular, $F \subseteq X$ compacto y U un abierto que contiene a F. Probar que existe un abierto V tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Solución. Para cada $z \in F$, el conjunto U es un entorno abierto de z y (al ser X regular) existe V_z entorno abierto de z tal que $z \in V_z \subseteq \overline{V_z} \subseteq U$. Como F es un compacto cubierto por los abiertos $\{V_z : z \in F\}$, existen $z_1, \ldots, z_n \in F$ tales que $F \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_{z_j}$. Poniendo $V := \bigcup_{j=1}^n V_{z_j}$ obtenemos un abierto que contiene a F y tal que $\overline{V} = \overline{\bigcup_{j=1}^n V_{z_j}} = \bigcup_{j=1}^n \overline{V_{z_j}} \subseteq U$ (recuérdese que la adherencia de una unión finita es la unión de las adherencias).

Ejercicio 8.1. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado y R la relación de equivalencia en X que consiste en identificar todos los puntos de A. Si X es regular y T_1, el cociente X/R es de Hausdorff.

Solución. Sea $\pi : X \longrightarrow X/R$ la proyección canónica. Es fácil ver que $\pi|_{X-A} : X - A \longrightarrow \pi(X - A)$ es un homeomorfismo, luego dos puntos distintos de $\pi(X - A)$ (que es abierto en X/R) se pueden separar trivialmente ya que $X - A$ es Hausdorff (porque X es regular y T_1). Así, la única consideración que es necesario hacer se refiere a la separación de $[A] = \pi(A) \in X/R$ y otro punto $\pi(x) \in X/R$ con $x \notin A$. Como X es regular, existen abiertos disjuntos $U, V \subseteq X$ tales que $x \in U$ y $A \subseteq V$. Entonces $\pi(U)$ y $\pi(V)$ contienen a $\pi(x)$ y $\pi(A) = [A]$ respectivamente y son disjuntos. Además son abiertos: $\pi^{-1}\pi(U) = U$ porque $A \cap U = \emptyset$ y $\pi^{-1}\pi(V) = V$ porque $A \subseteq V$.

Ejercicio 10. (Examen 2004)

1. Sea X un espacio de Hausdorff. Probar que si $K \subseteq X$ es compacto y $x \notin K$, existen abiertos disjuntos U y V tales que $K \subseteq U$ y $x \in V$.

2. Sean X un espacio completamente regular y T_1, $K \subseteq X$ compacto y $C \subseteq X$ un cerrado disjunto con K. Probar que existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(K) \subseteq [0, 1/2)$ y $f(C) = \{1\}$.

3. A partir de la función f definida en el apartado anterior, obtener una función continua $g : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $g(K) = \{0\}$ y $g(C) = \{1\}$.

Solución. (1) Para cada $z \in K$ sean U_z y V_z entornos abiertos y disjuntos de z y x, respectivamente. Tales entornos existen porque X es Hausdorff. Como K es un compacto cubierto por los abiertos $\{U_z : z \in K\}$, existen $z_1, \ldots, z_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{z_j}$. Pongamos $U := \bigcup_{j=1}^n U_{z_j}$ y $V := \bigcap_{j=1}^n V_{z_j}$. V es una intersección finita de entornos de x, y por tanto es un entorno de x. Asimismo U es un abierto que contiene a K. Además, claramente $U \cap V = \emptyset$ puesto que $U_{z_j} \cap V \supseteq U_{z_j} \cap V_{z_j} = \emptyset$ y $U \cap V = \bigcup_{j=1}^n U_{z_j} \cap V = \emptyset$.

(2) Para cada $z \in K$, la hipótesis de que X es completamente regular implica que existe una función continua $f_z : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f_z(z) = 0$ y $f_z(C) = \{1\}$. Pongamos $U_z = f_z^{-1}\big([0, \frac{1}{2})\big)$. Como f_z es continua y $f_z(z) = 0$, es claro que U_z es un entorno abierto de z. Ahora el compacto K está cubierto por los abiertos $\{U_z : z \in K\}$, luego existen $z_1, \ldots, z_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{z_j}$. Pongamos $f := \min_{1 \leq j \leq n} f_{z_j}$, que es una función continua de X en $[0, 1]$. Si $x \in K$, existe algún z_j tal que $x \in U_{z_j}$, luego $f_{z_j}(x) \in [0, \frac{1}{2})$ y por tanto $f(x) \in [0, \frac{1}{2})$. Si $x \in C$, por construcción $f_{z_j}(x) = 1$ para todas las z_j, luego $f(x) = 1$.

(3) Sea $r : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función continua lineal a trozos tal que $r\big([0,\frac{1}{2}]\big) = 0$ y $r(1) = 1$. Por ejemplo, puede tomarse

$$r(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 2x-1 & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Entonces $g = r \circ f$ cumple las condiciones del enunciado.