TOPOLOGÍA
CURSO 2006–2007
SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS (HOJA 6)

Ejercicio 1. Sea X un espacio topológico compacto y T_2, y $\mathcal{C}(X)$ el conjunto de las funciones reales continuas definidas en X. Consideremos en $\mathcal{C}(X)$ la topología uniforme definida por la métrica

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

Probar que las aplicaciones "suma" y "producto" de $\mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$, definidas por $(f,g) \mapsto f+g$, $(f,g) \mapsto f \cdot g$, son continuas.

Solución. Haremos sólo el caso del producto, pues es de la suma es más simple. Sea $(f_0, g_0) \in \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X)$ un punto concreto. Para cualquier otro par $(f,g) \in \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X)$ se tienen las siguientes desigualdades, en las que $x \in X$ es un punto arbitrario:

$$\begin{aligned}
|(f\cdot g)(x) - (f_0 \cdot g_0)(x)| &= \\
&= |(f\cdot g)(x) - (f\cdot g_0)(x) + (f\cdot g_0)(x) - (f_0\cdot g_0)(x)| \le \\
&\le |f(x)||g(x) - g_0(x)| + |g_0(x)||f(x) - f_0(x)| \le \\
&\le |f(x)|d(g,g_0) + |g_0(x)|d(f,f_0),
\end{aligned}$$

de donde

$$d(f\cdot g, f_0 \cdot g_0) \le |f(x)|d(g,g_0) + |g_0(x)|d(f,f_0).$$

Sean $M_g := \sup_{x\in X} |g_0(x)|$ y $M_f := \sup_{x\in X} |f_0(x)|$. Ambos supremos son finitos porque X es compacto y tanto f_0 como g_0 son continuas. Utilizando la desigualdad

$$|f(x)| \le |f(x) - f_0(x)| + |f_0(x)| \le d(f,f_0) + M_f$$

y sustituyendo en la de arriba se obtiene (D)

$$d(f\cdot g, f_0\cdot g_0) \le \big(d(f,f_0) + M_f\big)d(g,g_0) + M_g d(f,f_0).$$

Esto implica que el producto $\cdot : \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ es continuo. En efecto, una posible métrica que engendra la topología de $\mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X)$ es

$$D\big((f,g),(f_0,g_0)\big) = \text{máx}\{d(f,f_0), d(g,g_0)\}$$

y en consecuencia, si $(f_n, g_n) \longrightarrow (f_0, g_0)$, se tiene $d(f_n, f_0) \longrightarrow 0, d(g_n, g_0) \longrightarrow 0$ y con la desigualdad (D) concluimos

$$d(f_n \cdot g_n, f_0 \cdot g_0) \longrightarrow 0,$$

o también $f_n \cdot g_n \longrightarrow f_0 \cdot g_0$.

Ejercicio 6. Si $f : I = [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, probar que $f = 0$ en I.

Solución. En primer lugar, observemos que de la hipótesis del enunciado se sigue que $\int_0^1 P(x)f(x)\,dx = 0$ para cualquier polinomio P, lo que es obvio por la linealidad de la integral. Ahora, si $\varphi \in \mathcal{C}([0,1])$, afirmamos que también $\int_0^1 \varphi(x)f(x)\,dx = 0$. En efecto, como los polinomios son densos en $\mathcal{C}([0,1])$, existe una sucesión de ellos $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \varphi$ uniformemente. Entonces $(P_n f)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \varphi f$ uniformemente también (por el ejercicio 1. de esta hoja) y en consecuencia $\int_0^1 P_n(x)f(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 \varphi(x)f(x)\,dx$. Pero todas las integrales $\int_0^1 P_n(x)f(x)\,dx$ son nulas, como se observó antes, luego $\int_0^1 \varphi(x)f(x)\,dx = 0$.

Apliquemos lo establecido en el párrafo anterior con $\varphi = f$. Supongamos que $f(x_0) \neq 0$, de modo que $f^2(x_0) > 0$. Por continuidad de f^2 existe U entorno abierto de x_0 tal que $f(x) \geq \frac{1}{2}f^2(x_0)$ para todo $x \in U$, y entonces

$$0 = \int_0^1 f^2(x)\,dx \geq \int_U f^2(x)\,dx \geq \frac{1}{2}f^2(x_0)\lambda(U) > 0,$$

donde λ denota la medida de Lebesgue en $[0,1]$ (longitud). Esta contradicción completa la prueba.

Ejercicio 7. Designamos por $\mathcal{C}(I,I)$ el conjunto de las funciones continuas del intervalo $I = [0,1]$ en sí mismo. Comparar la topología de la convergencia puntual con la compacto–abierta en $\mathcal{C}(I,I)$.

Solución. Como I es compacto, la topología compacto–abierta en $\mathcal{C}(I,I)$ coincide con la de la convergencia uniforme. Siempre sucede que la topología de la convergencia puntual es menos fina que la compacto–abierta, y en este caso además es estrictamente menos fina: la sucesión $f_n(x) := x^n \in \mathcal{C}(I,I)$ converge puntualmente a la función f dada por $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ y $f(1) = 1$, pero no tiene límite cuando se considera la topología compacto–abierta (i. e., de la convergencia uniforme) en $\mathcal{C}(I,I)$.