Examen de topología. Primera parte

28-Junio-2006

1. Sea (X, τ) un espacio completamente regular. Probar que la topología τ coincide con la topología débil relativa a la familia de todas las funciones reales continuas, $C(X, \mathbb{R})$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : X \to I$ una función continua (X es un espacio topolgico cualquiera e I es el intervalo unidad con la topología usual). Probar que si $\{$ Supp $f_n, n \in \mathbb{N}\}$ constituye una familia localmente finita en X, la asignación $f(x) := \Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \forall x \in X$, define una función continua $f : X \to \mathbb{R}$. (El soporte de una función $h : X \to \mathbb{R}$ se define cómo: Supp $h := Cl_X\{x \in X, h(x) \neq 0\}$).

3. Dar un ejemplo de espacio compacto no metrizable.

4. Sea $\mathbb{R}_s$ la lnea de Sorgenfrey, y $\mathbb{Q}_s$ el subespacio de los racionales con la topología de trazas.

   - ¿Es $\mathbb{R}_s$ metrizable?.
   - ¿Lo es $\mathbb{Q}_s$?.
   - ¿ Puedes sacar alguna conclusión de las dos respuestas anteriores?.