

Problemas de Topología (Hoja 1)

25-II-08

1. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha), \alpha \in A\}$ una familia arbitraria de espacios topológicos. Si para cada $\alpha \in A$ se designa por \mathcal{B}_α una base de la topología τ_α , probar que la familia

$$\mathcal{B}' = \{ \cap_{\alpha \in F} (p_\alpha^{-1}(U_\alpha)); U_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha, F \subset A \text{ finito} \}$$

es una base para la topología producto en $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

2. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha), \alpha \in A\}$ una familia arbitraria de espacios topológicos. y sea $M_\alpha \subseteq X_\alpha$ para cada $\alpha \in A$. En el producto $\prod_{\alpha \in A} M_\alpha$ se pueden considerar dos topologías

- a) como producto de subespacios
- b) como subespacio del producto.

Probar que ambas coinciden.

3. Probar que con las hipótesis del ejercicio anterior, $\prod_{\alpha \in A} \overline{M_\alpha} = \overline{\prod_{\alpha \in A} M_\alpha}$.

Dar un ejemplo de subconjunto cerrado en \mathbb{R}^2 que no pueda escribirse como producto de cerrados.

4. Sea $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ un espacio producto.

- a) Si $(\xi_\alpha) \in \prod X_\alpha$ es un punto fijo, y

$H := \left\{ (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \text{ tal que } x_\alpha = \xi_\alpha, \text{ para casi todo } \alpha \right\}$, hallar la clausura de H en $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ con la topología producto.

- b) Probar que $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es conexo si y sólo si cada espacio factor es conexo.

Indicación: tomar un punto fijo $(\xi_\alpha) \in \prod X_\alpha$ y considerar los subespacios

$$S(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \left\{ (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \text{ tal que } x_\alpha = \xi_\alpha, \forall \alpha \neq \alpha_1, \dots, \alpha_n \right\}.$$

5. Probar que un espacio producto es Hausdorff o regular si y solo si cada espacio factor es respectivamente Hausdorff o regular.

6. Sea X un conjunto no vacío y $\{\tau_i, i \in I\}$ una familia de topologías en X . Demostrar que la aplicación diagonal

$$\Delta : X \rightarrow X^I$$

definida por $(\Delta x)_i = x$ para cada $i \in I$ es un homeomorfismo de $(X, \sup \tau_i)$ en $(\Delta(X), \tau_{\pi|_{\Delta(X)}})$, donde τ_{π} designa la topología producto $\prod \tau_i$. Estudiar el caso particular en que todas las topologías τ_i coincidan.

7. Sea $\{(X_i, d_i), i \in \mathbb{N}\}$ una familia de espacios métricos donde d_i designa una métrica en X_i acotada por 1, $\forall i \in \mathbb{N}$. Se define en $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ la distancia $d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i}$. Probar que la topología asociada a la métrica d , τ_d , es precisamente la topología producto $\prod_{i \in \mathbb{N}} \tau_{d_i}$.

8. Sea $\{(X_i, \tau_i), i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. En el conjunto producto $\prod_{i \in I} X_i$ se define la familia de subconjuntos

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in I} M_i; M_i \in \tau_i, \forall i \in I \right\}.$$

- a) Probar que \mathcal{B} es base para una topología τ_b en $\prod_{i \in I} X_i$ (topología de cajas; en inglés, box topology) y compararla con la topología producto.
- b) Probar que las proyecciones $p_j : (\prod_{i \in I} X_i, \tau_b) \rightarrow (X_j, \tau_j)$ son continuas ($\forall j \in I$).
- c) Sea $A_i \subset X_i, \forall i \in I$. Probar que $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$ en τ_b .
- d) Si $X_i = \mathbb{R}$ y la topología τ_i es la euclídea, ($\forall i \in I$), estudiar la clausura del conjunto

$$H = \{(x_i) \in \mathbb{R}^I; x_i = 0 \text{ para casi todo } i\},$$

en las topologías τ_b y τ_{Π} .

- e) Estudiar si la aplicación $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definida por $t \mapsto (t, t/2, t/3, \dots, t/n, \dots)$ es continua considerando en \mathbb{R} la topología usual y en el producto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la topología de cajas.
- f) Estudiar si ϕ es continua considerando en el espacio imagen la topología producto.

9. Si X es un espacio métrico no discreto, probar que la diagonal Δ como subespacio de $X^{\mathbb{N}}$ con la topología de cajas no es homeomorfo a X .