Problemas de topología. Hoja 3

1-IV-2008

1. Hallar los filtros convergentes en un espacio discreto.

2. Probar que un espacio X es de Hausdorff si y solo si todo filtro (o equivalentemente toda red) converge a lo sumo a un punto.

3. Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $\mathcal{F}$ un filtro en X. Un punto $x \in X$ es *punto de aglomeración* ó *punto adherencia* de $\mathcal{F}$ si $x \in \cap\{\overline{F}, F \in \mathcal{F}\}$. Probar : $x \in Agl\mathcal{F}$ si y solo si existe $\mathcal{F}'$ filtro en X más fino que $\mathcal{F}$, tal que $\mathcal{F}' \to x$.

4. Probar que la intersección de dos filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ es el filtro generado por la familia $\mathcal{H} = \{F \cup G; F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}\}$.

5. Si $\mathcal{F}$ es un filtro en un espacio topológico (X, τ) y x es un punto adherente de $\mathcal{F}$, probar que existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \to x$.

6. Sean (X, τ) , (Y, τ') espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación cualquiera. Probar:
   - Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X, la familia de subconjuntos de Y dada por $\{f(F); F \in \mathcal{F}\}$ es base de un filtro en Y al que denominaremos $f(\mathcal{F})$.
   - Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en X, $f(\mathcal{F})$ es un ultrafiltro en Y.
   - f es continua en $x \in X$ si y solo si $\mathcal{F} \to x$ implica $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.

7. (del Examen 2004) En el espacio $(\mathbb{R}, T_u)^{\mathbb{R}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se considera el subconjunto

$$M_n = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) > -\frac{1}{n}, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

   a) Determinar la adherencia y el interior de M_n.

   b) Sea $\mathcal{F}$ el filtro generado por $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Determinar los puntos de aglomeración y convergencia de $\mathcal{F}$.

8. Dar un ejemplo de filtro sin puntos de adherencia.

9. (del Examen de Septiembre, 2004) Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   1) todo filtro convergente en X tiene un miembro compacto.

   2) X es localmente compacto

10. (del Examen de Julio, 2002). Sea (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Se dice que $\mathcal{F}$ es de Cauchy en (X, d) si para cada $\epsilon > 0$ existe un $F \in \mathcal{F}$ tal que

$$F \times F \subset \{(x, y) \in X \times X, \quad d(x, y) < \epsilon\} =: U_\epsilon.$$

   a) Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, el filtro asociado también es de Cauchy.

   b) Probar que si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en (X, d), entonces $\mathcal{F}$ converge a cada uno de sus puntos de aglomeración.

11. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Probar que $\mathcal{F}$ converge a algún punto x de X si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe un elemento $F \in \mathcal{F}$ tal que $\operatorname{diam} F \leq \epsilon$.