Problemas de Topología.
Espacios Métricos: Compacidad. (Hoja 6)

3 - V - 2008

1. Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ mediante $\overline{d}(x, y) = min\{d(x, y), 1\}$.

   a) Probar que $\overline{d}$ es una métrica en X y que las topologías asociadas a $\overline{d}$ y d coinciden.

   b) (X, d) es completo si y solo si $(X, \overline{d})$ es completo.

   c) Si un espacio métrico (X, τ) es compacto, todas las métricas que dan lugar a la topología τ son acotadas.

2. Probar que en un espacio métrico todo cerrado es un G_δ.

3. Se define la linea entrelazada como el conjunto $\mathbb{R}$ de los reales, dotado de la topología τ cuyas bases de entornos $\beta(x)$ en cada punto $x \in \mathbb{R}$ son:

   - $\beta(x) = \{(a, b) \subset \mathbb{R}; a < x < b\}$, si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   - $\beta(0) = \{(\leftarrow, -n) \cup (-r, r) \cup (n, \to); r \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}\}$

   Probar que la linea entrelazada es metrizable.

4. Probar que los siguientes espacios no son metrizables:

   a) El producto numerable de líneas, $\mathbb{R}^\omega$, dotado de la topología de cajas.

   b) El producto de una cantidad no numerable de líneas, $\mathbb{R}^c$ dotado de la topología producto.

   c) La línea de Sorgenfrey.

5. Un espacio topológico X es numerablemente compacto si de todo recubrimiento abierto numerable de X se puede extraer un subrecubrimiento finito. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) X es numerablemente compacto.

b) Si una familia numerable de cerrados de X tiene la propiedad de interseccin finita (p.i.f.), entonces la intersección de todos sus miembros es no vacía.

c) Toda sucesión en X tiene algún punto de aglomeración.

d) Si X es T_1, las anteriores afirmaciones son equivalentes a: X no contiene ningún subconjunto infinito cerrado y discreto.

6. Sea X un espacio que verifica el primer axioma de numerabilidad. Consideremos las siguientes afirmaciones:

   a) X es compacto.

   b) X es secuencialmente compacto.

   c) X es numerablemente compacto.

   Probar que a) $\Rightarrow$ b)$\Leftrightarrow$ c).

7. Un espacio m se dirá que es totalmente acotado si para cada $\epsilon > 0$ existe un recubrimiento finito de X mediante conjuntos cuyo diámetro es a lo sumo ϵ (suele denominarse un ϵ-recubrimiento finito). Un subconjunto $M \subseteq X$ se dirá que es totalmente acotado si (M, d) es totalmente acotado. Probar que si M es totalmente acotado, también lo es $\overline{M}$. Dar un ejemplo de espacio métrico (X, d) que contenga un subconjunto acotado, que no sea totalmente acotado.

8. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) (X, d) no es totalmente acotado

   b) Para algún $\epsilon > 0$ existe una sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ siempre que $i \neq j$.

   Obtener como corolario que un espacio métrico (X, d) numerablemente compacto es totalmente acotado.

9. En un espacio métrico (X, d) las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) X es compacto.

   b) X es numerablemente compacto.

   c) X es secuencialmente compacto.

   d) X es completo y totalmente acotado.