Examen de Topología. (Problemas) 16-II-2007

1. Dados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, F un subconjunto finito de $\mathbb{R}^2$, y $r > 0$, se consideran los subconjuntos del plano

$$V_r((a,b)) = \{(a,b)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y - b > r(x-a), y - b > -r(x-a)\}$$

y $B(r, F, (a,b)) = V_r((a,b)) - F$. Sea τ la topología en $\mathbb{R}^2$ generada por la base

$$\mathcal{B} = \{B(r, F, (a,b)) \,|\, r > 0, (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad F \,\text{subconjunto finito de}\, \mathbb{R}^2\}.$$

   a) Estudiar la topología inducida en las rectas no verticales.
   b) Estudiar los axiomas de numerabilidad (I y II).
   c) Estudiar si el espacio $(\mathbb{R}^2, \tau)$ es separable y si es hereditariamente separable (es decir, si todos sus subespacios son separables).
   d) Estudiar los axiomas de separación (T_1, T_2, regular, completamente regular, normal) de (X, T).

2. Sea $\mathbb{T}$ el círculo unidad del plano complejo, con la topología usual heredada. Se consideran en $\mathbb{T}^{\mathbb{T}}$ la topología de la convergencia puntual τ_p y la topología de la convergencia uniforme en los compactos τ_{ku}. Estudiar las siguientes cuestiones:

   a) ¿Coinciden en $\mathbb{T}^{\mathbb{T}}$ ambas topologías ?.
   b) ¿Es $(\mathbb{T}^{\mathbb{T}}, \tau_p)$ compacto?.
   c) ¿Es $(\mathbb{T}^{\mathbb{T}}, \tau_{ku})$ compacto?.
   d) ¿Es $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{T})$, espacio de las aplicaciones continuas de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{T}$, un cerrado en $(\mathbb{T}^{\mathbb{T}}, \tau_{ku})$?.

3. a) Dar un ejemplo de espacio metrizabe que no sea separable.
   b) Si un espacio compacto es metrizable ¿Es necesariamente separable?
   c) Probar que un espacio métrico compacto tiene a lo sumo cardinalidad c (la potencia del continuo).