Examen final de Estructuras Algebraicas. (6-9-2013)

1. Sea H un subgrupo no trivial de un grupo finito G. Definir las clases laterales de G respecto de H y el índice de H en G.

2. Probar que para cualquier número positivo m, $m\mathbb{Z}$ es un ideal en el anillo $\mathbb{Z}$ de los enteros. ¿Es también un ideal en el anillo $\mathbb{Q}$ de los racionales?.

3. Sean H, L subgrupos normales de un grupo G, tales que $HL = G$ y $H \cap L = \{e_G\}$. Probar que $H \times L$ es isomorfo a G. ¿ Es cierta la afirmación en el caso en que solamente uno de ellos sea normal?. Comprobar para $G = S_3$

4. Sea α la permutación de S_9 definida por:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 7 & 2 & 5 & 1 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

   - Descomponer α en producto de ciclos disjuntos.
   - Calcular: ord α, sgn α y α^{53}.
   - Descomponer α en producto de trasposiciones.

5. Describir el grupo diedral D_4. Probar que las permutaciones $\sigma = (1234)$ y $\tau = (14)(23)$ de S_4 generan un subgrupo H de S_4 que es isomorfo a D_4.

6. Probar que si G posee un único subgrupo de orden n (para cierto número natural n), dicho subgrupo ha de ser normal.

7. Describir una lista completa de grupos abelianos de orden 56, no isomorfos dos a dos. Explorar mediante los teoremas de Sylow la estructura de un grupo no abeliano del mismo orden.

8. ¿ Cuántos homomorfismos hay de $\mathbb{Z}_3$ en el grupo alternado $\mathcal{A}_5$? ¿Son todos inyectivos?.

9. (2 puntos) Sea $A \subset \mathbb{Q}^{2\times 2}$ el subanillo de matrices definido por:

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} z & a \\ 0 & z \end{pmatrix}, \text{ con } z \in \mathbb{Z} \text{ y } a \in \mathbb{Q} \right\}$$

   a) Probar que todo ideal primo de A contiene a los elementos de la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{Q}$ y que estos elementos constituyen un ideal J de A.

   b) Probar que A/J es isomorfo a $\mathbb{Z}$. Calcular los ideales primos de A.

10. Probar la irreducibilidad del polinomio $3X^7 + 6X^6 - 12X^3 + 16X^2 + 4X + 10$ en $\mathbb{Q}[X]$.

DURACIÓN DEL EXAMEN: 3 HORAS.