Examen parcial de Estructuras Algebraicas.

29-XI-2013

1. Si $\mathbb{Z}$ designa el grupo de los enteros, ¿posee $\mathbb{Z}$ algún subgrupo finito? ¿Tiene algún grupo cociente finito? En caso afirmativo, describirlos.

2. Probar que si $(G, *)$ es tal que $x^2 = e$ para todo $x \in G$, entonces $(G, *)$ es abeliano.

3. Sea $\Delta : \mathcal{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ la aplicación que asigna a cada matriz cuadrada de orden n su determinante. Probar que Δ es un homomorfismo. Hallar $\mathsf{ker}(\Delta)$, $\mathsf{Im}(\Delta)$. Probar que:
$$\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})/\mathcal{SL}(n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^*.$$
($\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$ designa el grupo lineal general, i.e. el grupo de las matrices de orden n, de coeficientes reales y de determinante no nulo y $\mathcal{SL}(n, \mathbb{R})$ el subgrupo de $\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$ formado por las matrices de determinante 1.)

4. a) Probar que el siguiente subconjunto V del grupo simétrico S_4 es un subgrupo:
$$V := \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$
   b) Probar: $V \trianglelefteq S_4$ (es decir, V es subgrupo normal).
   c) ¿Es V subgrupo normal del grupo alternado A_4?.
   d) Probar que $H := \{id, (12)(34)\} \trianglelefteq V$, pero no es subgrupo normal de A_4.
   e) ¿Cuántos 3-ciclos hay en A_4? ¿Cuántas clases de conjugación de 3-ciclos?

5. Si G es un grupo abeliano de orden 504, estudiar las distintas clases de isomorfía a las que puede pertenecer G (todas). Si sabemos que en particular G contiene un elemento de orden 28, indicar a cuáles de las clases obtenidas puede pertenecer G.

6. Sean H y K dos subgrupos normales de un grupo finito G. Si H y K son cíclicos con órdenes p y q primos entre sí, demostrar que HK es también un subgrupo cíclico de G con orden pq.

7. Un grupo G se dirá que es un grupo **simple** si no contiene **subgrupos normales** distintos de los triviales, $\{e\}$ y G.
   a) Probar que un grupo abeliano es simple si y sólo si su orden $|G|$ es un número primo.
   b) Si G es un grupo simple, H un grupo cualquiera y $f : G \to H$ es un homomorfismo, probar que o bien f es inyectivo, o bien f es el homomorfismo nulo.
   c) ¿Es A_4 un grupo simple?