Estructuras algebraicas. Hoja 5

7-Noviembre-2013

1. Sea G un grupo y a un elemento de G. Probar que:
   - $M_a := \{x \in G|\ xa = ax\}$ es un subgrupo de G.
   - Para $S \subseteq G$ cualquiera, probar que $M_S := \{x \in G|\ xs = sx, \forall s \in S\}$ también es subgrupo de G. Si $S = G$ el conjunto M_G se denomina el centro de G, y escribimos $Z(G) := M_G$.
   - Probar que $Z(G)$ es abeliano.

2. Designamos por $Aut\ G$ el grupo formado por todos los automorfismos de un grupo G. Sea $\phi : G \to Aut\ G$ la aplicación definida por $x \mapsto C_x$ siendo $C_x(g) = xgx^{-1}$, $\forall g \in G$. (Obsérvese que la imagen de ϕ es precisamente el conjunto de los automorfismos interiores de G, $Int\ G := Im(\phi)$). Probar:
   - ϕ es homomorfismo y hallar su núcleo.
   - El centro de G, $Z(G)$ es un subgrupo normal de G.
   - $Int\ G$ es subgrupo normal de $Aut\ G$.

3. Sea G un grupo y $Z(G)$ su centro. Probar que si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.

4. Describir los automorfismos de los grupos cíclicos, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_m$, con $m \in \mathbb{N}$ cualquiera.

5. Sea G un grupo cíclico de orden n y d un divisor positivo de n. Probar:
   - $H_d : \{x \in G : x^d = 1_G\}$ es el único subgrupo de G de orden d.
   - ¿Es subgrupo de G el conjunto $N := \{y \in G : \text{existe } x \in G, \text{tal que } y = x^d\}$? En caso afirmativo, hallar el orden de N.

6. Sea G un grupo y $H \leq G$. Se define el normalizador de H en G mediante:

$$\mathcal{N}_G(H) := \{x \in G|\ xHx^{-1} = H\}$$

   Probar:
   - $\mathcal{N}_G(H)$ es un subgrupo de G.
   - H es un subgrupo normal de $\mathcal{N}_G(H)$.
   - Entre todos los subgrupos de G que contienen a H como subgrupo normal, $\mathcal{N}_G(H)$ es el máximo.

7. Sea G un grupo abeliano que posee algún elemento que no es de orden 2. Probar que existe un producto semidirecto $G \times_\rho \mathbb{Z}_2$ que no es grupo abeliano.

8. Probar que cada grupo diedral es producto semidirecto de dos grupos cíclicos.

9. Sea $X = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ y sean $f, g : X \to X$ las aplicaciones biyectivas definidas por $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = 2/x$, para cada $x \in X$. Demostrar que el subgrupo G del grupo de biyecciones S_X engendrado por f y g es isomorfo al grupo diedral D_4.

10. Probar que Si G es un grupo de orden 6, G es isomorfo a $\mathbb{Z}_6$ o a S_3. Además $\mathbb{Z}_6$ y S_3 no son isomorfos.