Estructuras algebraicas. Hoja 8

11-Diciembre-2013

1. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son anillos, determinando en caso afirmativo si son conmutativos, unitarios, dominios de integridad o cuerpos:

   a) El conjunto de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones suma y producto.

   b) El conjunto de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones suma y composición.

   c) El conjunto de las matrices reales de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ (con las operaciones suma y producto ordinario de matrices, en todos los ejercicios que siguen).

   d) El conjunto de las matrices reales de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$.

   e) El conjunto de las matrices reales de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$.

   f) El conjunto de las matrices reales de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   g) El conjunto de las matrices reales de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

   h) El conjunto de las matrices complejas de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

2. Sea X un anillo unitario y $U(X)$ el conjunto de las unidades de X. Probar que $U(X)$ es grupo multiplicativo (es decir, grupo respecto del producto de X).

3. (**Anillo producto**). Probar que el producto cartesiano $A \times B$ de dos anillos tiene estructura de anillo con respecto a las operaciones de suma y multiplicación definidas por coordenadas:

   $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ y $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2), \forall a_i \in A, b_i \in B$

   Si A, B son unitarios también $A \times B$ es unitario. Si A y B no tienen divisores de cero, ¿podemos afirmar que $A \times B$ no tiene divisores de cero?.

4. **Función ϕ de Euler** Si m es un entero positivo, se define $\phi(1) = 1$ y para $m \geq 2$ $\phi(m)$ es el número de enteros r tales que $(r, m) = 1$ (es decir, el número de enteros primos con m). Probar que: $|U(\mathbb{Z}_m)| = \phi(m)$.

5. Sea $U(X)$ el grupo multiplicativo de las unidades de un anillo unitario X. Probar que:

   a) $U(A) \times U(B) := U(A \times B)$, siendo A y B anillos unitarios.

   b) $U(\mathbb{Z}_8) \approx V \approx U(\mathbb{Z}_{12})$, dónde V designa el grupo de los cuatro, ó grupo de las simetrías de un rectángulo.

   c) $U(\mathbb{Z}_{10}) \approx \mathbb{Z}_4$

   d) $U(\mathbb{Z}_{15}) \approx \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$

6. Sea A un dominio de integridad. Si $a, b \in A$, probar que los ideales (a) y (b) coinciden si y sólo si existe una unidad $u \in A$ tal que $a = bu$.

7. Demostrar que un ideal J en un anillo unitario A coincide con A si y sólo si J contiene una unidad.

8. Determinar cuáles son las unidades del anillo de los enteros de Gauss.

9. Sea $d \in \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Demostrar que: $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es un subanillo del anillo $\mathbb{C}$ de los complejos.

   Si además d no es el cuadrado de un número entero, probar las siguientes afirmaciones:

   (i) Cualquier elemento del subanillo $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \subset \mathbb{C}$ se escribe de forma única como $a + b\sqrt{d}$, con $a, b \in \mathbb{Z}$.

   (ii) La aplicación $N : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Z}$ dada por $N(a + b\sqrt{d}) = a^2 - b^2 d$ verifica $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

   (iii) Un elemento $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es una unidad si y sólo si $N(\alpha) = \pm 1$.

10. Demostrar que la aplicación

$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

   es un homomorfismo de $\mathbb{C}$ al anillo de las matrices reales 2×2, y que es un isomorfismo sobre la imagen.

11. Demostrar que, si A es un cuerpo, un homomorfismo no nulo de anillos $f : A \to B$ es inyectivo.