Universitat de Barcelona
Departament d'Àlgebra i Geometria

Grupos topológicos y grupos de convergencia: estudio de la dualidad de Pontryagin.

Montserrat Bruguera Padró

1999

Universitat de Barcelona
Departament d'Àlgebra i Geometria

Grupos topológicos
y
grupos de convergencia:

estudio de la dualidad de Pontryagin

Memoria presentada por
MONTSERRAT BRUGUERA PADRÓ,
alumna del Programa de Doctorado 89/91
del Departament d'Àlgebra i Geometria de la UB,
bajo la dirección de la
Dra. ELENA MARTÍN PEINADOR,
Prof. Titular de Geometría y Topología de la UCM,
para optar al grado de Doctora en Matemáticas.

Barcelona, septiembre de 1999

Título: Grupos topológicos y grupos de convergencia:
estudio de la dualidad de Pontryagin
Autor y editor: ©Montserrat Bruguera Padró
C/ Sicilia 208, 2n 1a
08013 Barcelona
Edición primera
Barcelona, septiembre de 1999

ISBN: 84-699-1038-8
Depósito legal: B-36045-1999

Diseño cubiertas: Montserrat Noguera Montadas
Impresión cubiertas: Esparbé, S.A.
Encuadernación: SRV Projectes, S.L.

Agradecimientos

Dedico este trabajo a mis padres, a quienes debo todo cuanto soy y he hecho.

A Elena, que me ha introducido en los grupos topológicos y de convergencia y me ha transmitido generosamente todas las ideas que han permitido desarrollar nuevos resultados. Mi agradecimiento por compartir conmigo muchas horas de agradable, pero a veces costoso, trabajo de investigación. Con su trabajo, dedicación, ayuda constante e impulso, ha hecho posible la realización de esta tesis. Gracias también a su familia, por acogerme con tanto cariño en mis estancias en Madrid.

A María Jesús, con quien he trabajado, especialmente en temas de convergencia, obteniendo algunos de los resultados de esta tesis. Mi agradecimiento por sus observaciones y su continua y desinteresada colaboración a lo largo de todos estos años y, también, por animarme y aconsejarme en momentos de desaliento. A Rosa, por su apoyo incondicional y su comprensión. A toda mi Familia y amigos, a los que no puedo nombrar aquí, por su preocupación y ayuda, su compañía y su confianza.

A todos mis profesores de los diversos colegios, especialmente a Pili, porque de ellos recibí, en colaboración con mis padres, los primeros conocimientos, el interés por aprender y el entusiasmo por las matemáticas.

A mis compañeros del Departamento de Matemática Aplicada I de la U.P.C., que siempre me han facilitado la posibilidad de dedicarme a este trabajo, en un agradable clima de ayuda y colaboración.

A mis profesores de la Facultad de Matemáticas de la U.B., especialmente al Dr. Vaquer que desde el primer momento me tendió la mano. A Irene, que con sus consejos y su constante interés y amistad, me dio ánimos para seguir con constancia en esta tarea. Al Dr. Welters por su apoyo y orientación como tutor durante los años de la realización del doctorado.

Al profesor V.Tarieladze, cuyas ideas y seminarios nos han permitido tener un conocimiento práctico de los espacios vectoriales topológicos y las técnicas que se refieren a éstos. Es de destacar su disposición generosa, siempre abierta a discutir todo tipo de problemas matemáticos.

A W.Banaszczyk por haber escrito una espléndida memoria [8], que ha servido como punto de partida; realmente él nos inició en la teoría de grupos topológicos y nos hizo caer en cuenta de que se podría estudiar la dualidad en espacios de convergencia.

A los profesores K.H.Hofmann y V.Pestov que han leido cuidadosamente este trabajo. Agradezco esas horas, tan valiosas, que habrán tenido que robar a su intensa actividad, con la dificultad añadida de que la tesis está escrita en castellano. Sus observaciones han constituido el informe preliminar a la presentación de la tesis al Departamento, y servirán para poner diversos acentos en futuras publicaciones de los resultados aquí obtenidos.

A Juana, que ha tenido paciencia suficiente para leer la versión preliminar y hacerme observaciones.

Al Departamento de Geometría y Topología de la U.C.M., donde he realizado diversas estancias, por recibirme y facilitarme siempre su infraestructura. Y al Departamento de Matemática Aplicada de la U.V.

Índice General

Introducción

Los *grupos topológicos abstractos* fueron estudiados por primera vez por Schreirer y por F.Leja (en 1926 y 1927 respectivamente) aunque la idea ya estaba latente en los grupos continuos de transformaciones.

El tema tiene sus orígenes por una parte en el programa de Klein (1872), consistente en estudiar las geometrías a través de los grupos de transformaciones asociados a ellas, y por otra parte en la teoría de los grupos continuos de Lie que surge de la solución de ciertas ecuaciones diferenciales.

En la famosa lista de problemas de Hilbert (1900, International Congress of Mathematics), el problema 5º impulsó investigaciones en torno a los grupos topológicos. En lenguaje actual, el problema 5º planteaba lo siguiente: bajo qué condiciones se puede asegurar que un grupo topológico tiene una estructura analítica que hace de él un grupo de Lie. En 1933 A.Haar obtiene la existencia de una medida invariante por traslaciones en un grupo localmente compacto, metrizable y separable; A.Weil consigue quitar las condiciones de metrizabilidad y separabilidad. Como la integración en grupos de Lie era ya una técnica conocida y se había usado para obtener las propiedades de éstos, al surgir la posibilidad de integración en grupos localmente compactos, era natural pensar que en dicha clase de grupos se podrían usar las técnicas de trabajo de los grupos de Lie.

En 1952 el problema 5º de Hilbert fue resuelto conjuntamente por Gleason y por D.Montgomery y L.Zippin; esencialmente se pueden enunciar del siguiente modo sus respuestas: "Un grupo topológico es un grupo de Lie si y sólo si es localmente euclídeo o equivalentemente si es localmente compacto y no contiene subgrupos pequeños (esto es, el elemento neutro posee un entorno compacto que no contiene subgrupos no triviales)".

Estas consideraciones dan idea de la importancia de los grupos localmente compactos. Se da la circunstancia adicional que la teoría de grupos localmente compactos está en la confluencia de la Topología, el Álgebra, el Análisis y la Geometría Diferencial. Su desarrollo exige técnicas de estos cuatro campos, con acentos en unas u otras según el punto de vista considerado. Un hecho que confirma parcialmente nuestra afirmación es que tratados tan notables como "Abstract Harmonic Analysis" de E.Hewitt y K.A.Ross contiene una completísima y profunda información sobre los grupos localmente compactos.

Si nos restringimos a la subclase de los grupos localmente compactos abelianos hallamos otro teorema de suma importancia, el Teorema de dualidad de Pontryagin. Una idea brillante, que ahora nos parece muy natural, fue asociar a un grupo topológico abeliano el grupo de los *caracteres* continuos (homomorfismos continuos en el círculo complejo unidad) dotado de la topología compacto-abierta. Se obtiene así otro grupo topológico denominado el *dual*. L.S.Pontryagin estableció que un grupo localmente compacto abeliano es el grupo de caracteres de su grupo dual. Este es un teorema profundo, cuya demostración se apoya sustancialmente en el Teorema de representación de Peter-Weyl.

S.Kaplan (1948) fue el primero en dar un ejemplo de grupo no localmente compacto para el que se cumple también la propiedad enunciada en el teorema de Pontryagin, llamada *reflexividad*. Su ejemplo consiste en un producto arbitrario de grupos localmente compactos, no compactos; también considera los límites directos e inversos de grupos localmente compactos.

En 1950 apareció el trabajo de M.Smith donde se demuestra que el grupo topológico subyacente a un espacio vectorial topológico reflexivo (en el sentido del Análisis Funcional) es reflexivo en el sentido de Pontryagin. Además esta última noción es más general, ya que cualquier espacio de Banach infinito dimensional es reflexivo como grupo (es bien conocido que un espacio de Banach no es necesariamente reflexivo en el sentido del Análisis Funcional).

Claramente un espacio vectorial topológico infinito dimensional no es localmente compacto. Pero además este ejemplo hace pensar en los espacios vectoriales topológicos como una clase especialmente distinguida de grupos topológicos abelianos. La teoría de espacios vectoriales topológicos ha sido muy elaborada en los años 50 y 60 y existen teoremas muy potentes, dentro del Análisis Funcional relativos a ellos y, particularmente, a la subclase de los espacios localmente convexos; por esta razón, nos pareció atractivo estudiar versiones análogas de algunos de esos teoremas para grupos topológicos, siendo ésta la primera motivación para la presente memoria. Concretando un poco más, nos llamó la atención un teorema de Butzmann de enunciado sencillo y elegante que afirma lo siguiente: un espacio vectorial topológico es "reflexivo" en un sentido que especificaremos si y sólo si es localmente convexo y completo.

Para desvelar la "reflexividad" en sentido Butzmann tuvimos que estudiar la "estructura de la convergencia continua" y ésta se enmarca dentro de los *espacios de convergencia*, una clase de espacios que incluye los espacios topológicos. En efecto, se remonta a E.Fischer (1930) y H.R.Binz la idea de dotar al dual algebraico de un grupo (o espacio vectorial) topológico de una estructura que no llega a ser topología, pero cuya definición es "ad hoc" para que la aplicación evaluación definida del producto del grupo (respectivamente del espacio) por su dual en el toro unidimensional (respectivamente en los reales) sea continua. El dual así entendido lo denominamos *BB-dual* o *dual de convergencia* y, en principio, no es topológico. Al definir la *BB-reflexividad* del mismo modo que antes, hay que tratar con el dual de un grupo que no es topológico. Por esta razón hay que disponer de resultados que sean válidos para grupos de convergencia y grupos topológicos simultáneamente.

Si partimos de un grupo topológico localmente compacto la estructura de convergencia continua en el dual deriva de una topología, que es precisamente la compacto-abierta. Por ello el dual de convergencia es exactamente el dual sin más y la BB-reflexividad se puede considerar una extensión de la dualidad de Pontryagin.

La independencia de las nociones de BB-reflexividad y reflexividad en sentido Pontryagin se demuestra en [29] y su coincidencia en grupos metrizables en [28]. Conociendo ambos trabajos, hemos hecho un estudio más completo del tema, y vemos en el Capítulo 6 las razones que avalan el hecho de que los conceptos de convergencia continua, BB-dual, etc. son los instrumentos más adecuados para estudiar problemas relacionados con la completitud de grupos y espacios.

Al salirnos del marco de los grupos abelianos localmente compactos se pierden muchas técnicas de trabajo y la teoría de dualidad, incluso en el sentido clásico de Pontryagin, está sembrada de dificultades. No se conoce una caracterización precisa de los grupos reflexivos y, además, la clase de los grupos reflexivos no es cerrada por las operaciones de pasar a subgrupos cerrados o a cocientes de Hausdorff, lo que propicia la definición de una subclase donde haya estabilidad para estas operaciones. Con este objetivo se introdujo la "dualidad fuerte" en un artículo de R.Brown, P.J.Higgins, y S.A.Morris [20], noción que aparece simplificada en [8], al comprobar que las condiciones requeridas no eran independientes. Esencialmente un grupo es fuertemente reflexivo si sus subgrupos cerrados y sus cocientes de Hausdorff, así como los de su dual son reflexivos. En esta memoria hemos definido los *grupos fuertemente reflexivos de convergencia*, donde aún cabe una simplificación mayor.

Desmenuzamos ahora los contenidos de cada Capítulo de esta memoria, señalando (más claramente) lo que son aportaciones nuestras a la teoría; de hecho en el texto damos referencias bibliográficas en todos aquellos resultados extraidos de la literatura. De ahora en adelante sólo hablaremos de grupos abelianos, aunque no se haga mención explícita de ello.

Capítulo 1. Se describen los *espacios de convergencia*, marco adecuado para definir después la *estructura de convergencia continua.* Se trata de un Capítulo general para fijar las nociones que usaremos después. Hemos tenido que desbrozar lo que nos parecía esencial de la abundante (y no siempre coincidente) literatura. Nuestro punto de vista, convergencia mediante redes, es notoriamente menos frecuente en la misma, y de hecho hemos clarificado la relación existente entre redes y filtros convergentes cuando no se da la circunstancia de estar en un espacio topológico, situación óptima en la que ambas teorías son equivalentes.

Estudiamos en este Capítulo la *topología asociada a una estructura de convergencia* (P.Urysohn empleaba la terminología que nos parece muy gráfica de *convergencia a priori* y *topología a posteriori*), y nos situamos ya en convergencias compatibles con la estructura de grupo, dando propiedades generales de las topologías asociadas a subgrupos y cocientes.

El concepto de k-espacio topológico, tan fructífero en la topología general, nos ha servido de modelo para introducir (sección 1.5) lo análogo en convergencia. De hecho los *k-espacios de convergencia* han surgido de forma natural en nuestra investigación. En 1.6 extendemos algunas propiedades muy conocidas y esenciales de grupos topológicos a los grupos de convergencia, y finalmente incluimos aquí los Teoremas 1.7.1 y 1.7.2 que tuvimos que desarrollar como instrumentos para nuestro trabajo reflejado en los Capítulos 3 y 7.

Capítulo 2. Se describe la estructura de convergencia continua en primer lugar para un subespacio F del espacio de funciones continuas $C(X,Y)$ con X e Y espacios topológicos o espacios de convergencia. Después concretamos el caso en que X es grupo de convergencia (respectivamente espacio vectorial de convergencia), Y el toro unidimensional (respectivamente el espacio de los reales) y F la familia de los caracteres (respectivamente formas lineales) continuos. Es personal haber adoptado las redes como instrumento de trabajo. Algunas de nuestras proposiciones han surgido para matizar las distintas acepciones de "convergencia continua" existentes en la literatura. Por último probamos que, si X es primero numerable, la estructura de convergencia continua y la topología compacto-abierta tienen las mismas sucesiones convergentes (si bien, no las mismas redes convergentes).

Capítulo 3. Consideramos en este Capítulo el dual de convergencia de un grupo topológico. Con esta operación nos salimos de la categoría de los grupos topológicos abelianos, y en las proposiciones que desarrollamos tendremos que tener en cuenta su validez para grupos de convergencia. Una observación que cabría hacer es por qué no plantear directamente las cuestiones para grupos de convergencia, es decir, por qué no considerar la dualidad en toda la categoría CONABGR de los grupos de convergencia abelianos. De hecho no lo hacemos así porque nuestro interés está en obtener propiedades de grupos topológicos, aunque para ello hayamos de usar instrumentos ajenos a la teoría. Además, al incidir sobre el mismo campo de trabajo, los grupos topológicos, cabe establecer comparaciones entre la BB-reflexividad y la reflexividad en el sentido de Pontryagin. Otra razón para no hacer un estudio en toda la categoría CONABGR es que existen dificultades adicionales al trabajar en grupos de convergencia y algunos de los resultados que hemos obtenido para grupos topológicos no hemos conseguido probarlos para grupos de convergencia en general. Expresada así nuestra inclinación a trabajar en grupos de convergencia como instrumento, vamos a destacar no obstante una "armonía" de la categoría CONABGR, que podemos afirmar tras haber obtenido el resultado (3.2.5). El dual de un grupo de convergencia localmente compacto es un grupo topológico y el dual de convergencia de un grupo topológico es un grupo de convergencia localmente compacto.

Como primer paso para estudiar la dualidad en grupos localmente compactos de convergencia hemos iniciado el estudio de dualidad para grupos compactos y discretos. No sabemos ningún ejemplo de grupo compacto de convergencia que no sea topológico. Si existiera, desde luego no sería BB-reflexivo (Proposición 3.2.8 y Corolario 3.2.6). Por otra parte, el dual de un localmente compacto de convergencia no es localmente compacto. La posibilidad de definir algún teorema de estructura para grupos localmente compactos de convergencia parece muy remota ya que hay hordas de ellos. ¡Todo dual de convergencia de un grupo topológico es localmente compacto!

En el dual de convergencia de un grupo topológico hay propiedades que pueden obtenerse con mayor fuerza que en el correspondiente dual topológico; por ejemplo el grupo de caracteres de un cociente por un subgrupo cerrado es isomorfo bicontinuamente al polar del subgrupo (Proposición 3.0.3). Al considerar duales topológicos la correspondiente aplicación canónica no es en general isomorfismo topológico.

Hemos estudiado los conceptos de subgrupo *dualmente cerrado* y *dualmente sumergido* en grupos de convergencia, y hemos probado que todo subgrupo compacto de un grupo con suficientes caracteres continuos es dualmente cerrado y dualmente sumergido. El resultado análogo para subgrupos abiertos (Proposición 3.3.6) se obtiene más fácilmente.

Estudiamos los conjuntos equicontinuos del dual que esencialmente coinciden con los compactos de convergencia del dual. Esto es importante para los futuros desarrollos, y en 3.3 también establecemos las bases para el estudio a través de los subgrupos abiertos y compactos de la BB-reflexividad del grupo, que se hará en el Capítulo 7.

Capítulo 4. Se dedica a la noción de *casi-convexidad*. Como se dijo más arriba, los espacios localmente convexos son una clase de espacios vectoriales topológicos que juega un papel preponderante en la teoría de los mismos. Un obstáculo para generalizar teoremas de espacios vectoriales topológicos a grupos topológicos abelianos es precisamente que el concepto de convexidad no tiene sentido en los grupos. Vilenkin en [85] definió el concepto de *conjunto casi-convexo*. Banaszczyk demostró que el grupo subyacente a un espacio vectorial topológico es localmente casi-convexo si y sólo si el espacio es localmente convexo, y esto permite decir que los *grupos localmente casi-convexos* son la generalización de los espacios localmente convexos. Hemos estudiado con detalle en este Capítulo la gran diferencia que existe no obstante entre conjunto convexo y conjunto casi-convexo en un espacio vectorial topológico y hacemos varios cálculos en grupos sencillos, que ilustran estas grandes diferencias. Es de destacar, por ejemplo: a) un intervalo de la forma $[a, b]$, con $0 < a < b$, no es casi-convexo en $\mathbb{R}$; b) el conjunto $\{-1, 0, 1\}$ es un subconjunto casi-convexo de $\mathbb{R}$, etc. La literatura sobre el tema no se había ocupado de todo esto, pero nos parece importante disponer de ejemplos para no caer en confusiones, bastante naturales por otra parte.

Aunque los grupos localmente casi-convexos fueron introducidos en 1951, el primer estudio posterior que aparece de los mismos es en 1991, en [8], si bien ahí se tratan en función de una clase de grupos que se introducen (los *grupos nucleares*), que resultan ser localmente casi-convexos. No obstante en la citada memoria aparecen propiedades básicas de los grupos localmente casi-convexos.

Otra referencia actual la proporciona la tesis de L.Aussenhofer, donde se da un importante teorema de estructura de los mismos, y varios resultados básicos. Dicha tesis fue defendida en Julio de 1998, fecha en que obtuvimos un ejemplar de la misma, y pudimos comprobar que algunos de sus resultados se solapaban con otros que habíamos obtenido nosotros, y que por esta razón no los hemos incluido en la presente memoria, a excepción de 4.3.7. Sin embargo agradecemos haber conocido este trabajo; concretamente el Ejemplo 6.1.10, donde se demuestra la no reflexividad del grupo $L^2_{\mathbb{Z}}[0,1]$, nos ha servido para nuestro estudio posterior de completitud en grupos, que hacemos en el Capítulo 6.

Entre las Proposiciones básicas que hemos demostrado está que el cociente de un grupo localmente casi-convexo por un subgrupo compacto es localmente casi-convexo (4.3.6). Se sabe que la casi-convexidad se comporta mal en general en relación a los cocientes; concretamente todo espacio de Banach B admite un subgrupo discreto F tal que B/F tiene como dual el grupo trivial, y por tanto B/F no es localmente casi-convexo, siéndolo B.

En el epígrafe 4.6 estudiamos la "modificación localmente casi-convexa" de una topología de grupo. Bajo este nombre entendemos la topología localmente casi-convexa más fina entre las menos finas que la del grupo de partida. Esta topología surgió al intentar probar si la casi-convexidad local es una propiedad de tres espacios, i.e. una propiedad que siempre que se da en un subgrupo y en el cociente por dicho subgrupo, se da necesariamente en el grupo de partida. Un ejemplo citado en [50] para espacios localmente convexos nos alertó de que la respuesta a ese problema en general era negativa, pero ya habíamos estudiado la mencionada "modificación", y pudimos probar que la propiedad se da para el caso en que el subgrupo sea compacto. Hemos hecho ya una publicación [21] con este resultado.

Capítulo 5. Exponemos aquí algunas analogías y diferencias entre los espacios vectoriales y los grupos topológicos, recordamos distintas topologías localmente convexas y la relación entre el espacio de las formas lineales (continuas) y el grupo de los caracteres (continuos) de un espacio vectorial topológico. También hemos estudiado la elevación de caracteres de un grupo.

Los espacios vectoriales de convergencia se conocen mejor que los grupos de convergencia. Hemos probado que la topología asociada a la estructura de convergencia continua, definida en el dual de un espacio vectorial topológico, es precisamente la ew* (*equicontinuous weak star*) (Teorema 5.3.3). Este hecho es interesante y, en cierto modo, ayuda a entender con más profundidad algunos resultados conocidos en la literatura. En particular, nos ha permitido extender el Teorema de Banach-Dieudonné a espacios vectoriales metrizables. Es decir, quitamos las hipótesis de ser localmente convexo y completo en dicho teorema.

En el Teorema 5.3.12 vemos, en el marco de los espacios vectoriales topológicos localmente convexos, dos propiedades equivalentes a la BB-reflexividad, que nos permitirán demostrar, en el siguiente Capítulo, la equivalencia con la completitud.

Capítulo 6. Hemos probado que el teorema de completitud de Grothendieck, válido para espacios vectoriales topológicos localmente convexos, no admite lo que sería la generalización standard a la clase de grupos abelianos localmente casi-convexos. Presentamos un ejemplo (6.1.10) de grupo localmente casi-convexo, metrizable, que es completo y que no verifica el análogo al Teorema de Grothendieck para grupos.

Sin embargo, teniendo en cuenta que la completitud de un espacio localmente convexo es equivalente a la BB-reflexividad, se consigue una versión debilitada del Teorema de Grothendieck que satisfacen los grupos localmente casi-convexos (Teorema 6.1.8). En particular para grupos subyacentes a espacios vectoriales topológicos localmente convexos, así como para sus grupos duales, se puede reforzar el resultado anterior (Teoremas 6.0.4 y 6.0.2). La convexidad local es necesaria para poder afirmar que un espacio vectorial topológico es BB-reflexivo y consecuentemente para obtener la equivalencia entre completitud y BB-reflexividad, como demuestra el Ejemplo 6.0.3.

En 6.3 hemos definido la *propiedad ccp* para grupos localmente casi-convexos. La motivación ha sido que la completitud de un espacio localmente convexo está estrechamente relacionada con el hecho de que la envoltura convexa y equilibrada de todo compacto, sea de nuevo un conjunto compacto (*convex compactness property*). A pesar de ser muy natural definir esta propiedad para grupos, de modo análogo a la correspondiente para espacios vectoriales topológicos, no había sido hecho en la literatura sobre el tema. En 6.3.1 vemos que nuestra definición generaliza la correspondiente noción en espacios vectoriales topológicos y a lo largo de todo este epígrafe señalamos también analogías y diferencias de comportamiento de la propiedad en los espacios y en los grupos. Una diferencia notable es que la ccp en espacios vectoriales localmente convexos equivale a la suprayectividad de la inmersión canónica del espacio en su bidual (6.3.3), mientras que en grupos no es cierto, ni siquiera para grupos metrizables, como demuestra el grupo $L^2_{\mathbb{Z}}[0,1]$ (cfr. 6.3.6 y 6.3.5). Es interesante asimismo conocer que los grupos reflexivos tienen la propiedad ccp (6.3.10); que $\mathbb{Q}$ no la tiene (6.3.15), y que si un grupo tiene la propiedad ccp y la evaluación es continua, entonces el grupo es necesariamente localmente compacto (6.3.14).

Capítulo 7. Probamos que si un grupo topológico (o un grupo de convergencia) G contiene un subgrupo abierto A, entonces G es BB-reflexivo si y sólo si lo es A. Por otra parte si K es un subgrupo compacto de un grupo topológico con suficientes caracteres continuos, G/K es BB-reflexivo si y sólo si lo es G.

En [10] estaban estudiadas propiedades análogas para la reflexividad en el sentido clásico. Sin embargo las demostraciones de estos hechos para la BB-reflexividad han requerido técnicas distintas, tuvimos que desarrollar, por ejemplo, 1.7.1, 1.7.2, 3.3.7 y 3.3.9, y de hecho nuestros resultados implican algunos de los de [10].

Probado esto era muy natural pensar en todos los subgrupos cerrados y en los cocientes de Hausdorff de un grupo y estudiar su BB-reflexividad. Fácilmente se constata que la clase de los grupos BB-reflexivos no es cerrada por cocientes de Hausdorff, ni por subgrupos cerrados (no hay más que tener en cuenta que en el marco de los grupos metrizables ambas reflexividades coinciden y hay ejemplos de grupos metrizables reflexivos que no son fuertemente reflexivos en sentido Pontryagin).

Por ello introdujimos los *grupos fuertemente BB-reflexivos*, cuya definición puede hacerse más simple que la de los grupos fuertemente reflexivos en sentido Pontryagin. Un grupo G es fuertemente BB-reflexivo si los cocientes por subgrupos cerrados de G y de su dual son BB-reflexivos. De modo automático se obtiene que los subgrupos cerrados son BB-reflexivos, como se demuestra en 7.4.1. Para probar que la definición tenía consistencia, hemos dado ejemplos de grupos BB-fuertemente reflexivos distintos de los localmente compactos. Aún no hemos podido obtener ningún ejemplo que haga ver que la reflexividad fuerte en sentido clásico es distinta de la BB-reflexividad fuerte. La posible coincidencia de ambas propiedades simplificaría notablemente la definición de los primeros.

Por último estudiamos en este Capítulo las propiedades denominadas $X1$ y $X2$. Un grupo verifica $X1$ si todos sus subgrupos cerrados son dualmente cerrados y verifica $X2$ si todos sus subgrupos cerrados son dualmente sumergidos Hemos comprobado que estas propiedades se dan automáticamente si existe algún subgrupo abierto que las tenga.

Además de las preguntas que hemos dejado explícitamente planteadas, hay otras cuestiones que hemos abordado sin éxito. El tema es muy sugerente.

Capítulo 8. Reiteramos una vez más que el estudio de los espacios vectoriales topológicos como una clase distinguida de grupos topológicos ha estado subyacente en todo lo que hemos ido desarrollando a lo largo de esta memoria.

En esta Capítulo hemos estudiado condiciones bajo las cuales se puede afirmar que un grupo topológico G dotado de su topología de Bohr, G^+, es angélico. En cierto modo la topología de Bohr de un grupo es "análoga" a la topología débil de un espacio vectorial topológico. En efecto, la topología de Bohr es la menos fina de las que hacen continuos todos los caracteres del grupo. Sin embargo, hay que resaltar el hecho de que en un espacio vectorial topológico (aunque sea finito dimensional) la topología débil como espacio no coincide con la de Bohr. Es bien conocido por ejemplo, que todo espacio de Banach con la topología débil es angélico, pero pensamos que nadie se había ocupado hasta ahora de esta propiedad para grupos topológicos. En 8.3.1 obtenemos que si un grupo topológico G es metrizable y su dual separa puntos, G^+ es angélico, si bien la metrizabilidad no es condición necesaria para ello (8.3.6). Asimismo en 8.3.4 damos otras condiciones bajo las cuales también se cumple la propiedad.

Capítulo 1

Espacios de convergencia

La noción de convergencia históricamente es previa a la noción de topología. Como es bien sabido los espacios topológicos surgieron por una necesidad de tratar de modo unificado y sistemático propiedades de convergencia de sucesiones de funciones. En el marco de los espacios topológicos la convergencia se define con el rigor apropiado, por esta razón parece natural tomarlos como punto de partida.

Aunque la convergencia de sucesiones no es suficiente para determinar una topología, hacia los años 20 se introdujeron las redes -sucesiones generalizadas, hablando informalmente- cuya convergencia determina unívocamente la topología (teoría de Moore-Smith [65]). Es decir, a partir de las redes convergentes se construyen los cerrados del "espacio" y por tanto los abiertos. Moore y Smith fijaron las condiciones que debía cumplir una familia de redes convergentes para que existiera una topología en el conjunto cuyas redes convergentes fueran precisamente las dadas en principio (cfr. [53]).

En realidad, por estructura de convergencia entenderemos una familia de redes convergentes (o equivalentemente una familia de filtros convergentes) en un conjunto, que cumple algunas de las condiciones de Moore-Smith, es decir, que puede o no provenir de una topología. Nosotros en particular estamos interesados en la estructura de la convergencia continua, que se define en un "dual", si bien para enmarcarla haremos algunos estudios relacionados.

Si X e Y son espacios topológicos y $C(X,Y)$ es el conjunto de aplicaciones continuas de X en Y, al dotar a $C(X,Y)$ de la topología compacto-abierta, la aplicación evaluación, $e\colon C(X,Y) \times X \to Y$ definida por $e(f,x) = f(x)$ no es continua, salvo en casos muy particulares. Si alguna topología τ en $C(X,Y)$ hace continua la evaluación, ha de ser más fina que la compacto-abierta y no existe, en general, la menos fina de todas ellas. Se puede dotar sin embargo a $C(X, Y)$ de una estructura de convergencia que es la menos fina de todas aquéllas que hacen continua la evaluación, se denomina la *estructura de la convergencia continua.* En el Capítulo 2 estudiamos su definición y propiedades; a este fin introducimos previamente, en este Capítulo, los espacios de convergencia. Después nos centraremos en el estudio de los grupos de convergencia y sus *caracteres* (i.e. homomorfismos del grupo en el toro unidimensional $\mathbb{T}$) continuos.

1.1 Estructuras de convergencia

Las nociones de convergencia de sucesiones, redes y filtros en espacios topológicos son bien conocidas. Un estudio detallado del tema se puede encontrar en [45]. Aquí daremos definiciones y propiedades encaminadas a trabajar en el marco general de los espacios de convergencia.

Enumeramos las propiedades que debe tener una estructura de convergencia en un conjunto X para ser la convergencia definida por una topología:

1. toda red casi-constante es convergente,
2. toda subred de una red convergente a un elemento x, es convergente a x
3. si una red no converge a x, entonces existe una subred tal que ninguna de sus subredes converge a x
4. teorema del límite iterado: Sea $\{x_\lambda\}_{\lambda\in A}$ una red convergente a x y, para cada $\lambda \in A$, sea $\{x_\mu^\lambda\}_{\mu\in M_\lambda}$ una red convergente a x_λ, entonces existe una red diagonal convergente a x, i.e. si $M = \bigcup\limits_{\lambda\in A} M_\lambda$ y se considera en $A \times M$ el preorden lexicográfico, entonces existe una subred de $\{x_\mu^\lambda\}_{(\lambda,\mu_\lambda)\in A\times M}$ convergente a x.

A su vez, los filtros convergentes en un espacio topológico (X, τ) definen de forma natural una estructura de convergencia (sea $\mathcal{F}$ un filtro en X, $x \in X$ y $\mathcal{B}_\tau(x)$ el filtro de entornos de x, entonces $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} x \Leftrightarrow \mathcal{B}_\tau(x) \subset \mathcal{F}$).

La definición de subred que utilizaremos es debida a Ward [86] y tal como se comenta en [45] es la que da una perfecta equivalencia entre redes y filtros, en el siguiente sentido: si una red converge, el filtro de secciones asociado también converge y, recíprocamente, a todo filtro se le asocia de forma natural una red, que converge si lo hace el filtro.

En este apartado vamos a dar la definición de espacio de convergencia. Compararemos dos formulaciones distintas y daremos los axiomas que después vamos a manejar.

Sean $\{S_n\}_{n\in D}$ y $\{T_m\}_{m\in E}$ dos redes, entonces diremos que:

$\{T_m\}_{m\in E}$ es *subred* de $\{S_n\}_{n\in D}$	$\Leftrightarrow$	para cada $n_0 \in D$, existe $m_0 \in E$ que cumple: $\forall m \in E$ con $m \geq m_0$, existe $n \in D$ tal que $n \geq n_0$ y $T_m = S_n$

En un conjunto X, no vacío, se puede definir una convergencia indistintamente por redes o filtros. Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X, designaremos por $S_{\mathcal{F}}$ a la red asociada al filtro:

$$S_{\mathcal{F}} := \{x_\alpha \,|\, \alpha = (x, F) \text{ con } x_\alpha = x \in F \in \mathcal{F}\}$$

donde la relación de dirección en el conjunto dirigido $\{(x, F) \mid x \in F \in \mathcal{F}\}$ es:

$$(x, F) \leq (x', F') \iff F' \subseteq F$$

Dada una red $S := \{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, el *filtro de secciones asociado* es:

$$\mathcal{F}_S := \{F \,|\, \exists \alpha_0 \in A \text{ con } x_\alpha \in F, \forall \alpha \geq \alpha_0\}$$

Proposición 1.1.1 *Sean $\mathcal{F} < \mathcal{F}'$ dos filtros, entonces la red asociada a $\mathcal{F}'$ es subred de la red asociada a $\mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $S_{\mathcal{F}} = \{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ y $S_{\mathcal{F}'} = \{y_\beta\}_{\beta\in B}$ las redes asociadas a los filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ respectivamente.
Sea $\alpha := (x, F)$. Tomemos $F'_0 \in \mathcal{F}'$ tal que $F'_0 \subseteq F$ y sea $y_0 \in F'_0$. Entonces, dado $\beta_0 = (y_0, F'_0)$, $\forall \beta = (y, F')$, $y \in F' \in \mathcal{F}'$, tal que $\beta \geq \beta_0$ (i.e. $F' \subseteq F'_0$), existe $\alpha_0 = (y, F) \geq (x, F) = \alpha$ tal que $x_{\alpha_0} = y = y_\beta$. $\square$

Sea S un subconjunto de X y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Diremos que $\mathcal{F}$ *tiene traza en* S si para todo $F \in \mathcal{F}$, $F \cap S \neq \emptyset$, y al filtro inducido por $\mathcal{F}$ en S lo denotaremos por $\mathrm{tr}_S\mathcal{F}$ (*traza* de $\mathcal{F}$ en S). Así, $\mathrm{tr}_S\mathcal{F}$ es el filtro formado por los conjuntos $\{F \cap S : F \in \mathcal{F}\}$.

Una primera noción de espacio general de convergencia (cfr. [71](1.16)) es la siguiente: se define, en un conjunto no vacío, X, una *estructura de convergencia* como una aplicación, lim, del conjunto de filtros en X al conjunto de subconjuntos de X. Al par $(X, \lim)$ se le denomina *espacio general de convergencia*. Entonces un filtro ψ en X es *convergente* a $x \in X$ ($\psi \overset{\lim}{\to} x$) si y sólo si $x \in \lim \psi$. Es decir, se asigna a cada filtro ψ de X un subconjunto de X, $\lim \psi$, que está formado por los puntos a los que converge dicho filtro. Equivalentemente (cfr. [38], [15]) también se puede definir (X, Ξ), asignando a cada punto $x \in X$ el conjunto de filtros que convergen a dicho punto, $\Xi(x)$. Sin embargo estas definiciones son excesivamente amplias y para tener una riqueza de propiedades hemos de exigir algunas condiciones connaturales a una convergencia, pero hay diversas posibilidades y al hablar de un espacio de convergencia no todos los autores se refieren exactamente a lo mismo. Nosotros, siguiendo a Fischer [38] y a Binz [15], exigiremos condiciones equivalentes a los axiomas de Fréchet y Kuratowski para sucesiones.

Todo espacio topológico es un espacio de convergencia. Cuando sea necesario, denotaremos por Λ_τ a la estructura de convergencia definida a partir de los filtros convergentes de una topología τ.

Diremos que una estructura de convergencia Ξ es *topológica* si existe una topología cuya estructura de convergencia es Ξ (i.e. existe τ tal que $\Xi_\tau = \Xi$).

Veamos primero dos formulaciones distintas, donde aparecen los axiomas y las propiedades básicas que utilizaremos.

1.1.1 Definición de Poppe

Dado un espacio general de convergencia $(X, \lim)$, consideramos la intersección de filtros $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} := \{F \cup G : F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}\}$ y llamaremos *filtro de entornos de x* al filtro $\mathcal{U}(x) := \bigcap\{\psi : x \in \lim \psi\}$.

Se consideran los siguientes axiomas, que puede verificar o no verificar una convergencia:

- L I: Para cada $x \in X$, $x \in \lim[\{x\}]$, donde $[\{x\}]$ denota el ultrafiltro que contiene a $\{x\}$.
- L II: $\psi \subset \psi_1$ implica $\lim \psi \subset \lim \psi_1$.
- L III: Si para cada filtro $\rho \supset \psi$ existe un filtro $\sigma \supset \rho$ tal que $x \in \lim \sigma$, entonces $x \in \lim \psi$.
- L IV: Si $\mathcal{U}(x)$ existe, $x \in \lim \mathcal{U}(x)$.

L V: Existe una topología τ en X tal que la estructura de convergencia que de ella se deriva coincide con lim (i.e. $\psi \xrightarrow{\tau} x \Longleftrightarrow \psi \xrightarrow{\lim} x$).

Observación 1 *El axioma L III es equivalente a:*

L III': Si un ultrafiltro $\pi \supset \psi$ *y* $x \in \lim \pi$*, entonces* $x \in \lim \psi$.

Lema 1.1.2 *([71] (1.17))*
Sea $(X, \lim)$ *un espacio de convergencia que cumple los axiomas L I y L II. Entonces, si* $(X, \lim)$ *verifica L IV, también verifica L III.*

Observación 2 *Si un espacio general de convergencia* $(X, \lim)$ *verifica los axiomas L I, L II y L V puede ser identificado con un espacio topológico y entonces cumple también L III y L IV.*

1.1.2 Definición de Fischer - Binz

En [38] y en [15] se definen los espacios de convergencia de la siguiente forma:
Sea X un conjunto, a cada $x \in X$ se le asocia una colección $\Xi(x)$ de filtros en X tal que:

FB1: el ultrafiltro $\{A \subset X : x \in A\}$ está en $\Xi(x)$,

FB2: si $\mathcal{F} \in \Xi(x)$ y $\mathcal{G} \in \Xi(x)$, entonces el filtro $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ también pertenece a $\Xi(x)$,

FB3: si $\mathcal{F} \in \Xi(x)$ y $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{G} \in \Xi(x)$.

Se denomina *estructura de convergencia* en X al conjunto Ξ de todos los conjuntos de filtros $\Xi(x)$ para $x \in X$. El par (X, Ξ) se denomina *espacio de convergencia* y los filtros $\mathcal{F}$ de $\Xi(x)$ son los *filtros convergentes* a x. Escribiremos $\mathcal{F} \xrightarrow{\Xi} x$ en lugar de $\mathcal{F} \in \Xi(x)$.

Esta es la definición con la que aquí trabajaremos a partir de ahora. Su formulación con redes es la siguiente:

Sea (X, Ξ) un espacio de convergencia, denotamos por $\mathcal{C}_\Xi$ la clase formada por los pares (x, S) tales que $x \in X$, S es un red en X y $\mathcal{F}_S \in \Xi(x)$. Las redes S tales que $(x, S) \in \mathcal{C}_\Xi$ son las *redes convergentes* a x. Escribiremos $S \xrightarrow{\Xi} x$ en lugar de $(x, S) \in \mathcal{C}_\Xi$.

Proposición 1.1.3 *Si* (X, Ξ) *es un espacio de convergencia, entonces se verifica:*

R1) toda red casi-constante es convergente,

R2) si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *y* $\{y_\beta\}_{\beta\in B}$ *son redes convergentes a* x*, entonces existe una red* $\{z_\gamma\}_{\gamma\in D}$ *convergente a* x *y tal que* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *y* $\{y_\beta\}_{\beta\in B}$ *son subredes de* $\{z_\gamma\}_{\gamma\in D}$*,*

R3) toda subred de una red convergente a x*, es convergente a* x*.*

Consideraremos también la siguiente condición:

R4) si una red no converge a x, entonces existe una subred tal que ninguna de sus subredes converge a x.

Si una convergencia cumple R4 (que es equivalente a L III y a L III') diremos que *satisface el axioma de Urysohn*, ya que es una generalización natural de los clásicos axiomas de L-espacios definidos para sucesiones (cfr. [42], [56], [83]).

Se denota por $\mathcal{C}$ al conjunto de estructuras de convergencia en un conjunto X. Por $\mathcal{C}_1$ al conjunto de estructuras de convergencia Ξ que además cumplen la siguiente propiedad:

FB4: para cada $x \in X$, existe un filtro $\mathcal{B}(x) \in \Xi(x)$ tal que $\mathcal{F} \in \Xi(x)$ si y sólo si $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{F}$.

En ese caso, denotaremos por $\Xi(x) = [\mathcal{B}(x)]$. A las estructuras que cumplen FB4 las llamaremos *principales*.

Y finalmente $\mathcal{C}_0$ es el conjunto de estructuras de convergencia topológicas. En ellas se cumple además:

FB5: para todo $V \in \mathcal{B}(x)$, existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tal que para todo $y \in W$, $V \in \mathcal{B}(y)$.

En general tenemos: $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}$, donde las inclusiones son estrictas. Veremos más adelante que para grupos de convergencia se verifica $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1$.

1.2 Estructuras de convergencia topológicas

No todas las estructuras de convergencia provienen de topologías, veamos aquí un clásico ejemplo.

Ejemplo 1.2.1 *([69])*
Sean $X = [0,1]$, $Y = \mathbb{R}$, μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y C el subconjunto de Y^X formado por las funciones medibles y acotadas. Veamos que en C la convergencia en casi todo punto (a.e.) no es topológica.
Consideremos la sucesión de funciones $f_1^1, f_1^2, f_2^2, f_1^3, f_2^3, f_3^3, \dots$ tal que:

$$f_m^n(x) = \begin{cases} 1 & (m-1)/n \leq x \leq m/n \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases} \quad \textit{para } 1 \leq m \leq n,\ m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Observemos que, para cada $1 \leq m \leq n$, $\mu(\{x : |f_m^n(x)| \neq 0\}) = \dfrac{1}{n}$, por tanto, la sucesión converge en medida a 0, $f_m^n \xrightarrow{\mu} 0$. Sin embargo no converge en casi todo punto, ya que $\mu(\{x : \lim f_m^n(x) \neq 0\}) = 1$ porque, $\forall x \in [0,1]$ y $\forall n$, existe m_n tal que $f_{m_n}^n(x) = 1$.
Supongamos que la convergencia en casi todo punto es topológica, es decir, existe una topología τ en C tal que $f_\alpha \xrightarrow{a.e.} 0 \iff f_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$. Entonces $f_m^n \overset{\tau}{\not\to} 0$, luego, existe $U \in \mathcal{B}_{(C,\tau)}(0)$ tal que $\forall n$, $\exists n' \geq n$ con $f_m^{n'} \notin U$. Pero $\{f_m^{n'}\}$ es una subsucesión de $\{f_m^n\}$ y por tanto $f_m^{n'} \xrightarrow{\mu} 0$. Así, existe una subsucesión $\{f_m^{n''}\} \xrightarrow{a.e.} 0$ ([32] Proposition 3.1.2.). Como estamos suponiendo que la convergencia es topológica, $\{f_m^{n''}\} \xrightarrow{\tau} 0$, lo cual contradice que $f_m^{n'} \notin U$, $\forall n'$.

A continuación se enumeran las condiciones que debe cumplir una colección de filtros para definir una convergencia topológica.

Proposición 1.2.2 *([45] Proposición I.12.107)*
Sea X un conjunto no vacío, a cada $x \in X$ se le asocia una colección $\Xi(x)$ de filtros en X tal que:

$\mathcal{G}1$. el ultrafiltro $\{A \subset X : x \in A\}$ está en $\Xi(x)$,

$\mathcal{G}2$. si $\mathcal{F} \in \Xi(x)$ y $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{G} \in \Xi(x)$,

$\mathcal{G}3$. si $\mathcal{F} \notin \Xi(x)$ existe $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$, tal que para todo filtro $\mathcal{H} \supset \mathcal{G}$, $\mathcal{H} \notin \Xi(x)$,

$\mathcal{G}4$. *para todo* $A \subset X$, *sea*

$$\overline{A} := \{x \in X \mid \exists \mathcal{F} \in \Xi(x) \text{ tal que } A \in \mathcal{F}\}$$

entonces, si $\mathcal{G} \in \Xi(z)$ *y* $\overline{A} \in \mathcal{G}$, *se tiene que* $z \in \overline{A}$,

$\mathcal{G}5$. *si para cada* $F \in \mathcal{F}$, *existe* $\mathcal{F}'_F \in \Xi(x)$ *con* $F \in \mathcal{F}'_F$ *y* $x \in X$ *fijo, entonces existe* $\mathcal{F}'' \in \Xi(x)$ *tal que* $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}''$.

Entonces existe una única topología, τ, *en* X *tal que*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} x \Longleftrightarrow \mathcal{F} \in \Xi(x)$$

1.3 Conceptos topológicos en estructuras de convergencia

Vamos a tener en cuenta las caracterizaciones que se indican a continuación de los siguientes conceptos topológicos, mediante convergencia de filtros:

Sean $(X, \tau), (Y, \tau')$ espacios topológicos,

a) $A \subset X$ es abierto en τ si y sólo si para todo filtro $\mathcal{F}$ en X, convergente a $x \in A$ $\Rightarrow A \in \mathcal{F}$,

b) $C \subset X$ es cerrado en τ si y sólo si para todo filtro $\mathcal{F}$ en X con traza en C, convergente a $x \Rightarrow x \in C$,

c) $\overline{H} = \{x \in X : \exists \mathcal{F}$ filtro en X con traza en H tal que $\mathcal{F} \to x\}$

d) $f \colon X \to Y$ es continua en $x \in X$ si y sólo si para todo filtro $\mathcal{F}$ en X, convergente a $x \Rightarrow f(\mathcal{F}) \to f(x)$, donde $f(\mathcal{F})$ designa el filtro en Y engendrado por los conjuntos $f(F)$ con $F \in \mathcal{F}$.

Muchos otros conceptos topológicos se pueden caracterizar en términos de convergencia de filtros o redes y por tanto tiene sentido definirlos en el marco de los espacios de convergencia (cfr. [15]).

A lo largo de esta sección sean (X, Λ) e (Y, Ξ) dos espacios de convergencia. Sea S un subconjunto de (X, Λ). Para todo filtro $\mathcal{F}$ en S, sea $\mathcal{F}_X$ el filtro en X

engendrado por $\mathcal{F}$. Definimos la *estructura de convergencia inducida en* S, $\Lambda_{|S}$, mediante los filtros convergentes en cada punto $x \in S$:

$$\Lambda_{|S}(x) := \{\mathcal{F} \text{ filtro en } S \mid \mathcal{F}_X \xrightarrow{\Lambda} x\}.$$

Diremos que $A \subseteq X$ es Λ-*abierto* si y sólo si $A \in \mathcal{F}$, para cada filtro $\mathcal{F}$ en X, convergente a algún punto de A. Y diremos que $C \subseteq X$ es Λ-*cerrado* si y sólo si $X - C$ es Λ-abierto (i.e. para todo filtro $\mathcal{F}$ tal que $C \in \mathcal{F}$, si $\mathcal{F}$ converge a un punto x, entonces $x \in C$).

Es fácil comprobar que los abiertos así definidos verifican las condiciones para ser una topología, τ_Λ, que llamaremos *topología asociada* a Λ, y cuyas propiedades estudiaremos más adelante (§ 1.4).

Para todo subconjunto M de X, el conjunto

$$\overline{M} := \{x \in X \mid \exists \mathcal{F} \in \Lambda(x) \text{ tal que } M \in \mathcal{F}\}$$

se denomina la Λ-*clausura* de M (la denotaremos por $\overline{M}^{\Lambda}$ cuando, al manejar diversas estructuras, haya posibilidad de confusión). Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

Proposición 1.3.1 *Dados A y B, dos subconjuntos de X, se verifica:*

a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$

b) $A \subseteq \overline{A}$

c) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

d) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ *y* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Observación 3 *Un subconjunto C de X es Λ-cerrado si y sólo si $\overline{C} = C$.*

Observemos que dado un subconjunto M de X, su Λ-clausura, $\overline{M}$, no es siempre un subconjunto cerrado (i.e. $\overline{\overline{M}} \supseteq \overline{M}$). Cuando se da la igualdad para todo subconjunto de (X, Λ), la estructura de convergencia Λ es topológica.

Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación entre espacios de convergencia y sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ filtros en X e Y respectivamente. Denotaremos por $f(\mathcal{F})$ al *filtro imagen* de $\mathcal{F}$ por f, engendrado por $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$. Igualmente, si $\forall G \in \mathcal{G}$, $G \cap f(X) \neq \emptyset$, se define el *filtro antiimagen* de $\mathcal{G}$, $f^{-1}(\mathcal{G})$.

Observemos que $f^{-1}(f(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{F}$, $f(f^{-1}(\mathcal{G})) \supseteq \mathcal{G}$ y si f es suprayectiva $f(f^{-1}(\mathcal{G})) = \mathcal{G}$.

Se dice que f es *continua* si $f(\mathcal{F}) \to f(x)$ en Y cuando $\mathcal{F} \to x$ en X.

La composición de funciones continuas es continua. Por la definición de estructura inducida en un subconjunto de un espacio de convergencia, la inclusión es una función continua y, asímismo, lo es la restricción de una función continua.

Proposición 1.3.2 *Sea $f: X \to Y$ una aplicación continua entre dos espacios de convergencia X e Y, entonces para todo abierto $O \subset Y$, $f^{-1}(O)$ es abierto en X.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $O \subset Y$ un abierto y $\mathcal{F}$ un filtro en X, convergente a $x \in f^{-1}(O)$. Por ser f continua, $f(\mathcal{F})$ converge, en Y, a $f(x) \in O$, entonces $O \in f(\mathcal{F})$ por ser abierto y de aquí se deduce $f^{-1}(O) \in f^{-1}(f(\mathcal{F})) \subset \mathcal{F}$. □

Dadas dos estructuras de convergencia, Λ_1 y Λ_2, en un conjunto X, diremos que Λ_1 es *más fina* que Λ_2 ($\Lambda_2 \leq \Lambda_1$) si la identidad, $id: (X, \Lambda_1) \to (X, \Lambda_2)$, es continua.

En los espacios de convergencia se definen también estructuras finales e iniciales, con la propiedad universal que caracteriza dichas estructuras, de forma análoga al caso topológico ([38] §2, 4.). Ejemplos de estructuras iniciales son la inducida en un subconjunto y la producto. Estudiaremos ahora la estructura cociente que es final.

Sea $\sim$ una relación de equivalencia en el conjunto X y sea $p: X \to X/\sim$ la proyección canónica. La *estructura cociente* $\Lambda/\sim$ en $X/\sim$, se define como la más fina que hace continua la proyección p. Es decir, un filtro $\mathcal{F}$ en $X/\sim$ es $\Lambda/\sim$-*convergente* a $[x] \in X/\sim$ si y sólo si contiene alguna intersección finita de filtros de la forma $p(\phi_i)$, donde ϕ_i es un filtro en X, Λ-convergente a alguna preimagen $z_i \in p^{-1}([x])$.

En espacios de convergencia se definen también axiomas de separación. Se dice que X es *de Hausdorff* si todo filtro en X converge a lo sumo a un punto.

Diremos que X es Λ-*compacto* si para todo filtro $\mathcal{F}$ en X, existe $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ convergente a cierto $x \in X$. Equivalentemente, si todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ en X converge a algún $x \in X$. Un subconjunto $K \subset X$ es Λ-*compacto* si lo es como espacio de convergencia con la convergencia inducida $\Lambda_{|K}$.

Proposición 1.3.3 *Los subconjuntos cerrados de un compacto son compactos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea C un cerrado de un espacio compacto X y sea $\mathcal{F}$ un filtro en C. Para el filtro en X, engendrado por $\mathcal{F}$, existe un filtro más fino $\mathcal{G} \to x \in X$, pero $C \in \mathcal{G}$ y es cerrado, por tanto $x \in C$ y entonces el filtro de trazas de $\mathcal{G}$ es más fino que $\mathcal{F}$ y converge en C. $\square$

Proposición 1.3.4 *Los subconjuntos compactos de un espacio de convergencia de Hausdorff son cerrados.*

DEMOSTRACIÓN: Sea K un compacto de un espacio de convergencia X y sea $x \in \overline{K}$, entonces existe $\mathcal{F} \to x$ tal que $K \in \mathcal{F}$. Por ser K compacto, existe $\mathcal{G} \supset tr_S\mathcal{F}$, convergente en K a un $y \in K$, entonces $\mathcal{G}_X \to y$, como $\mathcal{F}$ converge a $x \in X$ y X es de Hausdorff, $x = y \in K$. $\square$

Proposición 1.3.5 *Sean X e Y dos espacios de convergencia tal que Y es de Hausdorff y $f\colon X \to Y$ una aplicación continua, entonces la imagen de un subconjunto compacto es compacta.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $K \subset X$ compacto, $g = f_{|K}\colon K \to f(K)$ es una aplicación suprayectiva, continua, y sea $\mathcal{F}$ un filtro en $f(K)$, entonces $g^{-1}(\mathcal{F})$, es un filtro en K. Por ser K compacto, existe $\mathcal{G} \supset g^{-1}(\mathcal{F})$, convergente en K. El filtro imagen directa de $\mathcal{G}$ por g contiene a $\mathcal{F}$ y, por ser g continua, es convergente en $f(K)$. $\square$

Proposición 1.3.6 *([38] Satz 7)*
Sean X e Y dos espacios de convergencia tales que Y es de Hausdorff y X es compacto y su estructura de convergencia es principal, entonces toda aplicación continua y biyectiva $f\colon X \to Y$ es bicontinua.

Un espacio de convergencia X es *localmente compacto* si es de Hausdorff y todo filtro convergente posee un elemento compacto. Observemos que la condición equivalente, expresada mediante redes, es que para toda red convergente, existe un compacto que contiene eventualmente a la red.

Proposición 1.3.7 *Los subconjuntos cerrados de un espacio de convergencia localmente compacto son localmente compactos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea un cerrado $C \subset X$ y sea $\mathcal{F}$ un filtro en C convergente, por definición el filtro en X generado por $\mathcal{F}$ es también convergente y entonces, contiene un elemento compacto K. Como C pertenece al filtro generado por $\mathcal{F}$, $K \cap C \neq \emptyset$, es compacto en C y está en $\mathcal{F}$. □

Proposición 1.3.8 *Los cocientes de Hausdorff de un espacio localmente compacto son localmente compactos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea (X, Ξ) un espacio de convergencia localmente compacto, $X/\sim$ un cociente de Hausdorff y $\mathcal{F}$ un filtro en $X/\sim$, convergente a $[x]$. Entonces existen filtros $\mathcal{G}_i \to x_i$ en X, tal que $x_i \in p^{-1}([x])$ y $\bigcap_{i=1}^{r} p(\mathcal{G}_i) \subset \mathcal{F}$. Por ser X localmente compacto, existen compactos $K_i \in \mathcal{G}_i$ y entonces $\mathcal{F} \ni \bigcup_{i=1}^{r} p(K_i)$ que es compacto. □

Observaciones 4 *Si (X, τ) es un espacio topológico, podemos considerar la topología cociente y la estructura de convergencia cociente, vamos a denotarlas por $\tau/\sim$ y $\Lambda_\tau/\sim$ respectivamente. Recordemos que $\tau/\sim$ es la topología más fina en $X/\sim$, que hace continua la proyección $p\colon X \to X/\sim$, y $\Lambda_\tau/\sim$ es la estructura de convergencia más fina que hace p continua. Entonces:*

1. $\tau/\sim \leq \Lambda_\tau/\sim$
2. *La igualdad $\tau/\sim = \Lambda_\tau/\sim$ no siempre se da, en efecto, la Proposición 1.3.8 no se verifica, en general, para espacios topológicos, i.e. si (X, τ) es localmente compacto, $\tau/\sim$ puede no serlo; y sin embargo dicha Proposición afirma que $\Lambda_\tau/\sim$ es una estructura de convergencia localmente compacta.*
3. *Si la proyección $p\colon (X, \tau) \to (X/\sim, \tau/\sim)$ es abierta, entonces $\tau/\sim = \Lambda_\tau/\sim$. Basta ver que para todo $[x] \in X/\sim$, el filtro de entornos de $[x]$ es $\Lambda_\tau/\sim$-convergente, i.e. $\mathcal{B}_{\tau/\sim}([x]) \xrightarrow{\Lambda_\tau/\sim} [x]$. Y esto se verifica porque, si p es abierta $p(\mathcal{B}_\tau(x)) \subseteq \mathcal{B}_{\tau/\sim}([x])$.*

Proposición 1.3.9 *Sea (X_1, Λ_1) un espacio de convergencia que satisface el axioma de Urysohn y (X_2, Λ_2) un espacio de convergencia localmente compacto. Si $J\colon (X_1, \Lambda_1) \to (X_2, \Lambda_2)$ es una aplicación continua y biyectiva tal que J^{-1} transforma subconjuntos compactos en compactos, entonces J^{-1} es continua.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{F}$ un filtro convergente a x en (X_2, Λ_2) y sea $y = J^{-1}(x)$. Ya que (X_1, Λ_1) satisface el axioma de Urysohn, es suficiente demostrar que, para cada filtro $\mathcal{G} \supset J^{-1}(\mathcal{F})$ existe un filtro $\mathcal{H} \supset \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{H}$ converge a y. El filtro $J(\mathcal{G})$ converge a x porque $J(\mathcal{G}) \supset \mathcal{F}$, y entonces, por ser X_2 localmente compacto, contiene un subconjunto compacto K de X_2. Así tenemos $\mathcal{G} = J^{-1}(J(\mathcal{G})) \ni J^{-1}(K)$ que es compacto. Y, por tanto, existe un filtro $\mathcal{H} \supset \mathcal{G}$ convergente, que converge a y por ser J continua e inyectiva. $\square$

Corolario 1.3.10 *Sea X un conjunto y $\Lambda_2 \leq \Lambda_1$ dos estructuras de convergencia tales que (X, Λ_2) es localmente compacto, (X, Λ_1) satisface el axioma de Urysohn y las dos estructuras tienen los mismos compactos, entonces $\Lambda_2 = \Lambda_1$.*

Corolario 1.3.11 *Sea X un conjunto y $\Lambda_2 \leq \Lambda_1$ dos estructuras de convergencia tales que (X, Λ_2) es de Hausdorff y (X, Λ_1) es compacto y satisface el axioma de Urysohn, entonces $\Lambda_2 = \Lambda_1$.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos aplicar la Proposición 1.3.9 a la identidad de (X, Λ_1) en (X, Λ_2) ya que (X, Λ_2) es también compacto, $I: (X, \Lambda_1) \to (X, \Lambda_2)$ es continua y biyectiva e I^{-1} transforma subconjuntos compactos en compactos porque todo C, compacto de (X, Λ_2), por ser (X, Λ_2) de Hausdorff, es cerrado (Proposición 1.3.4), entonces $I^{-1}(C)$ es cerrado en (X, Λ_1) y por tanto es compacto. $\square$

1.4 Topología asociada a una estructura de convergencia

Veamos ahora que, en un espacio de convergencia (X, Λ), con los conjuntos Λ-abiertos se puede definir una topología cuya convergencia coincide con Λ si ésta es topológica.

Se puede demostrar fácilmente que se cumplen las siguientes propiedades:

a) Para la estructura de convergencia Λ_τ definida a partir de los filtros convergentes de una topología dada τ, se cumple: A es Λ_τ-abierto si y sólo si A es τ-abierto.

b) El conjunto $\{A \subseteq X : A \text{ es } \Lambda\text{-abierto}\}$ satisface los axiomas de una topología.

Así pues, tiene sentido definir $\tau_\Lambda := \{A \subseteq X : A \text{ es } \Lambda\text{-abierto}\}$, como la *topología asociada a la estructura de convergencia* Λ.

Observemos que $\mathcal{F} \overset{\Lambda}{\to} x \Rightarrow \mathcal{F} \overset{\tau_\Lambda}{\to} x$. Sin embargo la implicación contraria no es cierta si (X, Λ) no cumple el axioma L V (i.e. $\Lambda_{\tau_\Lambda} \leq \Lambda$). Por la definición de topología asociada, Λ y τ_Λ tienen los mismos cerrados. Sin embargo, para un subconjunto S de (X, Λ), la Λ-clausura y la τ_Λ-clausura pueden no coincidir, $\overline{S}^\Lambda \subseteq \overline{S}^{\tau_\Lambda}$.

Si la topología asociada a una estructura de convergencia es de Hausdorff, también lo es la estructura de convergencia. Se ve fácilmente que si un subconjunto de X es Λ-compacto, entonces es también τ_Λ-compacto.

Proposición 1.4.1 *Sea* (X, Λ) *un espacio de convergencia e* (Y, τ) *un espacio topológico. Una aplicación* $f\colon (X, \Lambda) \to (Y, \tau)$ *es continua si y sólo si la correspondiente aplicación* $\begin{array}{rccc} \tilde{f}\colon & (X, \tau_\Lambda) & \to & (Y, \tau) \\ & x & \to & f(x) \end{array}$ *es continua.*

Demostración: Por ser la identidad de (X, Λ) en (X, τ_Λ) continua, si $\tilde{f}$ es continua, también lo es f.
Veamos la implicación contraria. Sea $O \subset Y$ un τ-abierto, aplicando la Proposición 1.3.2 a f que es continua, $\tilde{f}^{-1}(O) = f^{-1}(O)$ es Λ-abierto, entonces, por definición de la topología asociada a una estructura de convergencia, es τ_Λ-abierto. Y por ser $\tilde{f}$ una aplicación entre espacios topológicos es continua. $\square$

Proposición 1.4.2 *Sea* (X, Λ) *un espacio de convergencia,* $S \subset X$ *un subconjunto y* $\sim$ *una relación de equivalencia en* X*. Llamaremos* $\Lambda_{|S}$ *a la estructura de convergencia heredada en* S*,* $\Lambda/\!\sim$ *a la estructura cociente en* $X/\!\sim$ *y* $p\colon X \to X/\!\sim$ *a la proyección canónica.*

Entonces tenemos la siguiente relación entre las topologías asociadas:

a) $\tau_\Lambda/\!\sim \,=\, \tau_{\Lambda/\sim}$ *(i.e. la topología cociente de la topología asociada a una estructura de convergencia es la topología asociada a la estructura de convergencia cociente).*
En particular, si X *es topológico, la topología cociente es la topología asociada a la estructura de convergencia cociente.*

b) $(\tau_\Lambda)_{|S} \leq (\tau)_{\Lambda_{|S}}$

c) *Además, si* (X,Λ) *es de Hausdorff y* $S \subset X$ *compacto, entonces* $(\tau_\Lambda)_{|S} = (\tau)_{\Lambda_{|S}}$.

DEMOSTRACIÓN:

a) $\tau_\Lambda/\!\sim\, = \tau_{\Lambda/\sim}$

$\subset$) Sea $O \in \tau_\Lambda/\!\sim$ y $\mathcal{F}$ un filtro en $X/\!\sim$, $\Lambda/\!\sim$-convergente a $[z] \in O$. Si $\mathcal{L}_i$ son filtros en X tal que $\mathcal{L}_i \xrightarrow{\Lambda} x_i \in p^{-1}([z]) \subset p^{-1}(O)$ y $\bigcap_{i=1}^{r} p(\mathcal{L}_i) \subset \mathcal{F}$, entonces $p^{-1}(O) \in \mathcal{L}_i$ ya que $p^{-1}(O)$ es τ_Λ-abierto. Y por ser la proyección suprayectiva $O = p(p^{-1}(O)) \in \bigcap_{i=1}^{r} p(\mathcal{L}_i) \subset \mathcal{F}$. Así $O \in \tau_{\Lambda/\sim}$.

$\supset$) Sea $U \in \tau_{\Lambda/\sim}$ y $\mathcal{L}$ un filtro en X tal que $\mathcal{L} \xrightarrow{\Lambda} t \in p^{-1}(U)$. Entonces $p(\mathcal{L}) \to [t] \in U$ en $X/\!\sim$ y, por ser U $\tau_{\Lambda/\sim}$-abierto, $U \in p(\mathcal{L})$. Así $p^{-1}(U) \in \mathcal{L}$. Y $U \in \tau_\Lambda/\!\sim$.

b) $(\tau_\Lambda)_{|S} \leq (\tau)_{\Lambda_{|S}}$
Sea C un subconjunto de S $(\tau_\Lambda)_{|S}$-cerrado y sea $\mathcal{F}$ un filtro en S tal que $\mathcal{F} \overset{(\tau)_{\Lambda_{|S}}}{\to} x \in S$. Queremos ver que $x \in C$. El filtro en X generado por $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_X$, es convergente a x y contiene a C y a sus superconjuntos. Por ser C $(\tau_\Lambda)_{|S}$-cerrado, existe C' τ_Λ-cerrado tal que $C = C' \cap S$, entonces $x \in C$.

c) Nos falta ver $(\tau_\Lambda)_{|S} \geq (\tau)_{\Lambda_{|S}}$
Sea $C \subset S$ un subconjunto $(\tau)_{\Lambda_{|S}}$-cerrado. Observemos que los conjuntos Λ-compactos son también τ_Λ-compactos. Por ser S compacto y X de Hausdorff, C es τ_Λ-cerrado en X y entonces es $(\tau_\Lambda)_{|S}$-cerrado en S.

□

Vamos a dar un ejemplo de un espacio de convergencia X con un subespacio $Y \subset X$ que no verifica la igualdad $(\tau_\Lambda)_{|Y} = (\tau)_{\Lambda_{|Y}}$.

Ejemplo 1.4.3 *Sea* X *el conjunto de los puntos* (x,y) *del plano* $\mathbb{R}^2$ *tales que* $0 \leq y \leq x \leq 1$. *Definimos una estructura de convergencia* Λ *como sigue:*

Una sucesión de puntos $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diremos que converge,* $(x_n,y_n) \xrightarrow{\Lambda} (x,y)$, *si* $(x_n,y_n) \to (x,y)$ *en el sentido usual y* $\exists n_0$ *tal que* $\forall n > n_0$, $x_n = x$ *o* $y_n = y$.

El conjunto de redes Λ*-convergentes a un punto* (x,y)*, es, también por definición, el conjunto formado por las sucesiones* $(x_n,y_n) \xrightarrow{\Lambda} (x,y)$ *y sus subredes.*

Sea $Y := \{(x, y) \in X \mid 0 < y \leq x \leq 1 \text{ ó } x = y = 0\}$.

Entonces $\{(0,0)\} \in \tau_{\Lambda_{|Y}}$ *y* $\{(0,0)\} \notin \tau_{\Lambda|Y}$.

Proposición 1.4.4 *Si un espacio de convergencia* (X, Λ) *satisface el axioma de Urysohn y* (X, τ_Λ) *es de Hausdorff, entonces los subconjuntos compactos de* (X, Λ) *son topológicos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea K un subconjunto Λ-compacto de X, basta aplicar el Corolario 1.3.11 a $(K, \Lambda_{|K})$ y a su espacio topológico asociado $(K, \tau_{\Lambda_{|K}})$. □

Sean (X_i, Λ_i) espacios de convergencia, denotamos por $\Pi\Lambda_i$ la *estructura producto* en ΠX_i, que es la estructura de la convergencia inicial respecto a todas las proyecciones. Entonces las topologías asociadas verifican: $\Pi\tau_{\Lambda_i} \leq \tau_{\Pi\Lambda_i}$ (cfr. [38] pag.289-290).

1.5 k-espacios topológicos y de convergencia

Los k-espacios juegan un papel destacado dentro de la Topología General porque contienen clases de espacios importantes, como los CW-complejos, y también en el Análisis Funcional, por sus buenas propiedades respecto de la completitud. Un espacio topológico (X, τ) se dirá que es un *k-espacio* si tiene la topología débil respecto a la familia de los τ-compactos. Es decir, si se verifica la siguiente propiedad:

Un subconjunto $H \subseteq X$ es cerrado si y sólo si
$H \cap K$ es cerrado en K, para todo τ-compacto K de X.

Enumeramos a continuación las propiedades más notables, desde nuestro punto de vista, de los k-espacios (dando la referencia de aquéllos que no figuran en tratados clásicos):

1. X es k-espacio si y sólo si para todo espacio topológico Y y toda aplicación $f : X \to Y$, se verifica la equivalencia: f continua $\iff$ $f_{|K}$ es continua $\forall K \subseteq X$ compacto.

2. Los espacios localmente compactos y los espacios I-numerables son k-espacios.

3. Si X es un espacio de Hausdorff, X es k-espacio si y sólo si X es un cociente de un localmente compacto de Hausdorff.

4. Todo subespacio cerrado de un k-espacio es k-espacio.

5. El producto de dos k-espacios, no es en general k-espacio.

6. Si X es localmente compacto y de Hausdorff, la aplicación $1_X \times g: X \times Y \to X \times Y'$ es una aplicación cociente, siempre que $g: Y \to Y'$ sea aplicación cociente (Teorema de Whitehead).

7. Si X es localmente compacto y de Hausdorff, entonces $X \times Y$ es k-espacio, para todo k-espacio Y de Hausdorff (cfr. [31], [6]).

8. Las propiedades 6 y 7 admiten recíproca en la clase de los espacios de Hausdorff, es decir, si X es de Hausdorff y verifica las propiedades enunciadas en 6 ó 7 entonces X es localmente compacto (cfr. [64]).

9. Todo espacio Čech completo y T_1 es k-espacio (cfr. [62] Proposición XIII 2.39).

Los k-espacios se han denominado en la literatura espacios "compactamente generados" (término que en el contexto de grupos que usamos más adelante es inadecuado) y "compactamente determinados". También se emplea el término *k-extensión* de (X,τ), kX, para designar el espacio X dotado de la topología débil relativa a los τ-compactos denominada $k(\tau)$. Obviamente, si (X,τ) es k-espacio, coincide con kX. Existe un gran número de estudios sobre el functor k. Subrayamos el hecho de que la topología $k(\tau)$ es la más fina de las topologías en X que coinciden con τ en los τ-compactos. Si τ es de Hausdorff, $k(\tau)$ también se caracteriza por ser la topología más fina con los mismos compactos que τ.

Noble [68] definió los k-grupos. Un grupo topológico abeliano, (G,τ), es un *k-grupo* si τ es la topología de grupo más fina entre todas aquéllas que inducen la misma topología en los compactos. También puede definirse esta noción por la siguiente propiedad: G es k-grupo si y sólo si para cualquier grupo topológico G' y cualquier homomorfismo $f: G \to G'$ tal que $f_{|K}$ es continuo para todo compacto $K \subseteq G$, se tiene que f es continuo.

Los k-espacios lineales y k-espacios localmente convexos han sido definidos en [43] y [72].

Introducimos ahora la noción análoga a la de k-espacio para espacios de convergencia.

Dado un espacio de convergencia (X, Λ) cada una de las siguientes propiedades, que no son equivalentes en general, podría ser la definición de k-espacio.

(K_0) (X, τ_Λ) es k-espacio topológico,

(K_1) un subconjunto C de X es Λ-cerrado si y sólo si $C \cap K$ es Λ-cerrado en K, para todo Λ-compacto K de X,

(K_2) una función f de X en otro espacio de convergencia es continua si y sólo si $f_{|K}$ es continua, para todo Λ-compacto K de X.

Nosotros diremos que X es k-*espacio de convergencia* si cumple (K_1).

Proposición 1.5.1 *Sea (X, Λ) un espacio de convergencia tal que (X, τ_Λ) es de Hausdorff. Entonces son equivalentes:*

a) X es k-espacio de convergencia

b) Si $f\colon (X, \Lambda) \to (Y, \tau)$ es una aplicación en un espacio topológico cualquiera, se verifica:
f es continua $\iff$ $f_{|K}$ es continua para todo K Λ-compacto.

DEMOSTRACIÓN:

a)$\Rightarrow$b) $\Leftarrow$) Sea $f\colon (X, \Lambda) \to (Y, \tau)$ tal que $f_{|K}$ es continua para todo K Λ-compacto. Sea $C \subset Y$ cerrado. Para todo Λ-compacto K, $f^{-1}(C) \cap K$ es Λ-cerrado, pues $f^{-1}(C) \cap K = (f_{|K})^{-1}(C)$ y $f_{|K}$ es continua para todo K Λ-compacto. Por a) obtenemos que $f^{-1}(C)$ es Λ-cerrado.

$\Rightarrow$) Es trivial.

b)$\Rightarrow$a) Sea $\mathcal{H} := \{H \subset X \text{ tal que } K \cap H \text{ es } \Lambda\text{-cerrado para todo } K \quad \Lambda\text{-compacto}\}$. Se comprueba inmediatamente que $\mathcal{H}$ constituye la familia de cerrados de una topología en X, que llamaremos $\tau_{\mathcal{H}}$. Observemos que $\tau_\Lambda < \tau_{\mathcal{H}}$. Entonces la aplicación identidad de (X, τ_Λ) en $(X, \tau_{\mathcal{H}})$ tiene inversa continua y en cada K Λ-compacto es continua porque en K las topologías τ_Λ y $\tau_{\mathcal{H}}$ coinciden, por tanto es también continua y $\tau_\Lambda = \tau_{\mathcal{H}}$

$\square$

Proposición 1.5.2 *Sea (X, Λ) un k-espacio de convergencia tal que (X, τ_Λ) es de Hausdorff, entonces (X, τ_Λ) es k-espacio topológico.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C \subset X$ tal que para todo τ_Λ-compacto, K, $K \cap C$ es τ_Λ-cerrado, queremos ver que C es τ_Λ-cerrado. Si tomamos los K, Λ-compactos (son τ_Λ-compactos), $K \cap C$ es τ_Λ-cerrado y, por definición de la topología asociada a la estructura de convergencia, es también Λ-cerrado. Por ser (X, Λ) k-espacio, C es Λ-cerrado, o lo que es lo mismo, τ_Λ-cerrado. $\square$

Corolario 1.5.3 *En todo espacio de convergencia tal que su topología asociada es de Hausdorff, (K_2) $\Rightarrow$ (K_1) $\Rightarrow$ (K_0).*

Proposición 1.5.4 *Los espacios de convergencia localmente compactos cumplen (K_1) y (K_2). Y si la topología asociada es de Hausdorff, entonces también cumplen (K_0).*

DEMOSTRACIÓN:

(K_1) Sea $C \subset X$ tal que $C \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$. Sea $x \in \overline{C}$, entonces existe un filtro $\mathcal{F}$ en C, convergente a x. Por ser X localmente compacto, existe un compacto $K \in \mathcal{F}$. Entonces $C \cap K$ es cerrado y el filtro de trazas de $\mathcal{F}$ en $C \cap K$ es convergente a x, por tanto $x \in C \cap K \subset C$.

(K_2) Sea $f: X \to X'$ una función entre espacios de convergencia tal que $f_{|K}$ es continua, para todo compacto K de X, y sea $\mathcal{F}$ un filtro convergente a $x \in X$. Por ser X localmente compacto, existe un compacto $K \in \mathcal{F}$ y $x \in K$. Podemos considerar el filtro $\mathrm{tr}_K\mathcal{F}$ que es un filtro en K convergente a x y entonces $f_{|K}(\mathrm{tr}_K\mathcal{F})$ converge a $f_{|K}(x)$. Consideramos el filtro engendrado en X', que contiene a $f(\mathcal{F})$ y es convergente, y se obtiene $f(\mathcal{F})$ convergente a $f(x)$. $\square$

1.6 Grupos de convergencia

Sea G un grupo abeliano. Dados dos filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ en G, el filtro $\mathcal{F} + \mathcal{H}$ es el filtro engendrado por los conjuntos $F + H$, con $F \in \mathcal{F}$ y $H \in \mathcal{H}$.

Si Ξ es una estructura de convergencia en G, el par (G, Ξ) se denomina *grupo de convergencia* si Ξ es compatible con la operación del grupo (i.e. dados dos filtros convergentes, $\mathcal{F} \to x$, $\mathcal{H} \to y$, se verifica $\mathcal{F} - \mathcal{H} \to x - y$).

Proposición 1.6.1 *([38] § III Satz 5.)*
En grupos de convergencia las estructuras principales son topológicas, $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea (G, Ξ) un grupo de convergencia tal que $\Xi \in \mathcal{C}_1$. Existe entonces un filtro $\mathcal{B}$ con la propiedad FB4 para $0 \in G$. Los filtros de Ξ convergentes a un elemento de G, están determinados por aquellos convergentes a 0. Sea $\Xi(0) = [\mathcal{B}]$. Por la definición de grupo de convergencia, se cumple: $\mathcal{B} + \mathcal{B} \supseteq \mathcal{B}$ y $-\mathcal{B} \supseteq \mathcal{B}$. Entonces $[x + \mathcal{B}] = x + [\mathcal{B}] \Rightarrow [x + \mathcal{B}] = \Xi(x)$, $\forall x \in G$.
Veamos que se cumple la propiedad FB5 de los axiomas de Fischer. Sea $V \in \mathcal{B}$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W + W \subset V$ y $-W = W$, entonces $\forall x \in W$ se cumple $x + W \subset V$ y por tanto $V \in \mathcal{B}(x)$. $\square$

Traducimos ahora a grupos de convergencia algunas propiedades de grupos topológicos.

Proposición 1.6.2 *Si G es un grupo de convergencia, entonces cada subgrupo abierto de G es también cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea A un subgrupo abierto de G. Probaremos que si $x \notin A$, $x \notin \overline{A}$. Tomamos un filtro $\mathcal{F}$ convergente a x; entonces $\mathcal{F} - x$ converge a 0 y $A \in \mathcal{F} - x$ porque A es un subgrupo abierto. Así $A + x \in \mathcal{F}$ y $(x + A) \cap A = \emptyset$, ya que si la intersección no fuese vacia, existirían $a, b \in A$ tal que $x + a = b$ y entonces $x = b - a \in A$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ no tiene traza en A y $x \notin \overline{A}$. $\square$

Un grupo de convergencia (G, Λ) es de Hausdorff si y sólo si el conjunto $\{0\}$ es cerrado. Si H es un subgrupo cerrado de (G, Λ), entonces G/H con la estructura cociente Λ/H es un grupo de convergencia.

Proposición 1.6.3 *El cociente de un grupo de convergencia por un subgrupo abierto es discreto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea A un subgrupo abierto de un grupo de convergencia G y $\mathcal{F}$ un filtro en G/A convergente a $[A]$. Entonces $\mathcal{F}$ contiene algún filtro de la forma $\bigcap_{i=1}^{r} p(\phi_i)$, donde ϕ_i es un filtro en G, convergente a un $a_i \in A$ y p es la proyección canónica. Por ser A abierto, $A \in \phi_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $[A] \in \bigcap_{i=1}^{r} p(\phi_i) \in \mathcal{F}$ y por lo tanto $\mathcal{F}$ es el filtro generado por $\{[A]\}$. Observemos que al ser G/A discreto, es un grupo topológico. □

Proposición 1.6.4 *Sea A un subgrupo abierto de un grupo de convergencia G. Todo homomorfismo φ de G en un grupo topológico G' es continuo si y sólo si su restricción al subgrupo A, $\varphi_{|A}$, es continua.*

Demostración: Supogamos $\varphi_{|A}$ continua, y consideremos un filtro $\mathcal{F}$ en G convergente a 0. Entonces $A \in \mathcal{F}$ porque A es un subgrupo abierto, y $\mathcal{F}$ tiene traza $\mathrm{tr}_A\mathcal{F}$ en A ($\mathrm{tr}_A\mathcal{F}$ es un filtro en A, convergente a 0). Tenemos ahora $\varphi_{|A}(\mathrm{tr}_A\mathcal{F})$ convergente a 0 en G'. Entonces para cada entorno V de cero en G', existe F en $\mathcal{F}$ tal que $V \supset \varphi(F \cap A)$. Y, ya que $F \cap A \in \mathcal{F}$, el filtro $\varphi(\mathcal{F})$ converge a 0. □

Veremos más adelante (Ejemplo 6.2.4) que la topología asociada a un grupo de convergencia puede no ser de grupo.

1.7 Elevación de redes convergentes definidas en grupos cociente

Teorema 1.7.1 *Sea G un grupo topológico, M un subgrupo cerrado y $p\colon G \to G/M$ la proyección canónica. Si $\{p(g_i)\}_{i\in I}$ es una red en G/M, convergente a 0, entonces para todo $z \in M$, existe $\{y_d\}_{d\in D}$ convergente a z en G, tal que $\{p(y_d)\}_{d\in D}$ es subred de $\{p(g_i)\}_{i\in I}$.*

Demostración: Sea $z \in M$. Para cada U entorno de 0 en G definimos

$$H_U^i := \{x \in U \mid x \in p^{-1}(p(g_i))\} = (g_i + M) \cap U \quad \text{y} \quad H_U := \bigcup_{i\in I} H_U^i$$

$H_U \neq \emptyset$ ya que por ser p abierta, $p(U)$ entorno de 0 en G/M y $\{p(g_i)\}_{i\in I}$ una red convergente a 0 en G/M, existe $i_0 \in I$ tal que $p(g_i) \in p(U)$, $\forall i \geq i_0$.

Definimos

$$D = \{(x_i, U) \mid x_i \in H_U \subset U, U \in E_G(0)\}$$

con la relación de dirección

$$(x_i, U) \leq (x_j, V) \Leftrightarrow j \geq i, V \subset U.$$

D es un conjunto dirigido, en efecto, sean $(x_i, U) \in D$ y $(x_j, V) \in D$. Por la convergencia de $\{p(g_i)\}_{i\in I}$, existe $k_0 \in I$ tal que $p(g_k) \in p(U \cap V)$, $\forall k \geq k_0$ y si k es tal que $k \geq i, j, k_0$, entonces $(x_k, U \cap V) \geq (x_i, U)$ y $(x_k, U \cap V) \geq (x_j, V)$.

Ahora definimos la red

$$y_d = S_{(x_i,U)} = x_i + z, \qquad \text{para cada } d = (x_i, U) \in D$$

- $\{y_d\}_{d\in D}$ converge a z en G.
  En efecto, dado $z + U$ un entorno de z, con $U \in E_G(0)$, podemos encontrar i_0 tal que $(x_{i_0}, U) \in D$ porque $H_U \neq \emptyset$. Y para todo $(x_i, V) \geq (x_{i_0}, U)$ se cumple $i \geq i_0$, $x_i \in V \subseteq U$ y por tanto $y_d = S_{(x_i,V)} = x_i + z \in z + U$, $\forall d = (x_i, V) \geq (x_{i_0}, U) = d_0$.

- $\{p(y_d)\}_{d\in D}$ es subred de $\{p(g_i)\}_{i\in I}$.
  Tenemos que ver que dado $j \in I$, existe $d_0 \in D$ tal que $\forall d \geq d_0$, $p(y_d) = p(g_k)$ con $k \geq j$. Sea $j \in I$. Elegimos $V \in E_G(0)$ arbitrario y $h \geq j$ tal que $x_h \in H_V$. Entonces, si $d = (x_i, U) \geq (x_h, V) = d_0$, $y_d = S_{(x_i,U)} = x_i + z$ con $x_i \in p^{-1}(p(g_i))$ y tomando $k = i$, $k \geq h \geq j$, $U \supseteq V$ y $p(y_d) = p(x_k + z) = p(g_k)$. □

Para sucesiones se puede establecer:

Proposición 1.7.2 *Sea G un grupo topológico I-numerable y $\{p(g_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en G/M, convergente a 0. Entonces para todo $z \in M$, existe una sucesión $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergente a z en G tal que $\{p(y_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de $\{p(g_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración: Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable decreciente de entornos de 0 en G.
Tomamos primero $z = 0 \in M$ y consideramos los conjuntos de la forma $H_i^{n_i} := U_i \cap p^{-1}(g_{n_i}) \neq \emptyset$. Escogemos un elemento $y_{n_1} \in H_1^{n_1}$. Después tomamos $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_2 > n_1$ y elegimos $y_{n_2} \in H_2^{n_2}$. Y procedemos así sucesivamente.
Es inmediato que $\{y_{n_i}\}$ converge a 0 pues cada término está en U_j y $\{p(y_{n_i})\}$ es subsucesión de $\{p(g_n)\}$ porque, $\forall n_i$, $p(y_{n_i}) = p(g_{n_i})$.
Sea $z \in M$, tomamos la base de entornos de z, $\{z + U_n : n \in \mathbb{N}\}$ y hacemos lo mismo. □

El siguiente resultado para sucesiones en grupos localmente compactos es un poco más fuerte que 1.7.2, si bien las hipótesis son distintas. La demostración, constructiva, no es nada fácil.

Teorema 1.7.3 *([84](1.))*
Si G es un grupo localmente compacto, cada sucesión convergente $x_n \to x_0$ en G/M puede ser "elevada" a una sucesión convergente $y_n \to y_0$ en G, i.e. $p(y_n) = x_n$ para todo $n \geq 0$.

En los Teoremas anteriores hay que tener cierto cuidado en la elección de los representantes, como puede deducirse del siguiente resultado.

Lema 1.7.4 *([74] $1'''$)*
Existe un grupo abeliano compacto G, un subgrupo cerrado H de G y una sucesión (x_n) en G tal que $x_n + H \to 0$ en G/H, pero no existe ninguna subsucesión de (x_n) convergente en G.

Capítulo 2

Espacios de funciones

Nosotros estamos interesados principalmente en el estudio de propiedades de grupos topológicos y de convergencia, particularmente en relación a dualidad. Es natural por ello ceñirnos a un tipo concreto de aplicaciones, los homomorfismos de grupos y, concretamente, los *caracteres*, i.e. homomorfismos de un grupo en el toro unidimensional. En este Capítulo estudiaremos el grupo de caracteres continuos dotado de la estructura de la convergencia continua y también de la topología compacto-abierta.

2.1 La estructura de la convergencia continua. Definición y propiedades

Sean X e Y dos conjuntos, denotaremos por Y^X al conjunto de todas las funciones de X en Y y por $e: Y^X \times X \to Y$ a la aplicación evaluación definida por $e(f,x) = f(x)$, $f \in Y^X$ y $x \in X$.

Para X e Y espacios de convergencia, o en particular espacios topológicos, $C(X,Y)$ es el subconjunto de Y^X formado por las funciones continuas. Diremos que una topología en un subconjunto H de Y^X es *admisible* si hace continua la evaluación. Si la topología es admisible, necesariamente $H \subset C(X,Y)$.

Si X e Y son espacios topológicos, toda topología admisible es más fina que la compacto-abierta ([66] Proposition 25). En general, en $C(X,Y)$ no existe la topología menos fina que haga continua la evaluación. Sin embargo, se puede definir una estructura de convergencia con esta propiedad. La *estructura de la convergencia continua*, que denotaremos por Λ_c, fue introducida por Hahn en 1920 para sucesiones de funciones continuas. En 1955 Schaefer generalizó esta noción a conjuntos de aplicaciones de un espacio topológico en un espacio métrico [77].

Mencionamos a continuación hechos que ponen de manifiesto que la estructura de la convergencia continua, en general, no deriva de una topología:

- en espacios completamente regulares X, la existencia de la topología admisible menos fina en la clase de funciones reales continuas $C(X)$, es equivalente a que X sea localmente compacto [2],

- en espacios vectoriales topológicos localmente convexos E, la estructura de la convergencia continua en $\mathcal{L}E$ (conjunto de las aplicaciones lineales continuas de E en $\mathbb{R}$) es topológica sólo si E es finito dimensional [15],

- en grupos topológicos reflexivos G, la topología compacto-abierta en ΓG (conjunto de los homomorfismos continuos de G en $\mathbb{T}$) hace continua la evaluación si y sólo si G es localmente compacto [63].

Sean (X,Λ) y (Y,Λ') dos espacios de convergencia.
Si F es un subconjunto de Y^X y $H \subseteq X$, $e(F\times H) := \{f(x); f \in F \text{ y } x \in H\}$.
Sean $\mathcal{F}$ un filtro en Y^X y $\mathcal{H}$ un filtro en X; $\mathcal{F}\times\mathcal{H}$ denota el filtro generado por los productos $F \times H$, con $F \in \mathcal{F}$ y $H \in \mathcal{H}$. Denotaremos por $e(\mathcal{F}\times\mathcal{H})$ al filtro generado por $\{e(F\times H), F \in \mathcal{F}, H \in \mathcal{H}\}$.

Si $\mathcal{F}$ es un filtro en Y^X y $f \in Y^X$, diremos que $\mathcal{F}$ *converge continuamente* a f ($\mathcal{F} \stackrel{\Lambda_c}{\to} f$) si para cada $x \in X$ y para cada filtro ψ en X tal que $\psi \stackrel{\Lambda}{\to} x$, se cumple $e(\mathcal{F}\times\psi) \stackrel{\Lambda'}{\to} f(x)$ en Y.

En $C(X,Y)$, la familia de todos los filtros Λ_c-convergentes define una estructura de convergencia, que denotaremos por Λ_c y que se denomina *estructura de la convergencia continua*. Observemos, sin embargo, que en Y^X, Λ_c no verifica el axioma FB1. Evidentemente Λ_c hace continua la evaluación y, además, es la estructura de convergencia menos fina con esta condición ([34] Theorem 1). Ya que no siempre existe la topología admisible menos fina, en general Λ_c no es topológica y en ese caso τ_{Λ_c} no es admisible.

Si Y es de Hausdorff, también lo es $(C(X,Y),\Lambda_c)$.

Para manejar convergencia de redes hay que definirla a partir de los filtros.

Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ una red en Y^X y $f \in Y^X$. Diremos que:

$\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ *converge continuamente* a f ($f_\alpha \overset{\Lambda_c}{\to} f$)	$\Leftrightarrow$	el filtro en Y^X generado por $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ converge continuamente a f

Veamos a continuación una definición equivalente que utilizaremos frecuentemente.

Dados D y E, dos conjuntos dirigidos, en $D \times E$ consideraremos la dirección producto (i.e. $(d, e) \leq (d', e') \iff d \leq d'$ y $e \leq e'$).

Proposición 2.1.1 *Sean (X, Λ) e (Y, Λ_1) dos espacios de convergencia, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ una red en Y^X y $f \in Y^X$, entonces son equivalentes:*

a) $f_\alpha \overset{\Lambda_c}{\to} f$

b) Para cada $x \in X$ y para cada red $\{x_\beta\}_{\beta\in E}$ convergente a x en X, la red $\{f_\alpha(x_\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in D\times E}$ converge a f(x) en Y.

DEMOSTRACIÓN:

b)$\Rightarrow$a) Sean $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ una red en Y^X y $f \in Y^X$ tal que para cada $x \in X$ y para cada red $\{x_\beta\}_{\beta\in E}$ convergente a x en X, la red $\{f_\alpha(x_\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in D\times E}$ converge a f(x) en Y. Si $\mathcal{F}$ es el filtro generado por la red $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$, queremos ver $\mathcal{F} \overset{\Lambda_c}{\to} f$.

Tenemos que demostrar que para cada filtro ψ en X tal que $\psi \overset{\Lambda}{\to} x$, se cumple $e(\mathcal{F} \times \psi) \overset{\Lambda_1}{\to} f(x)$ en Y.

Vamos a considerar la red asociada a ψ. Como conjunto dirigido tomamos $E = \{(y, G) \mid y \in G \in \psi\}$ con la relacion binaria definida por: $(y, G) \leq (y_1, G_1)$ $\Leftrightarrow G_1 \subset G$. Y entonces la red, que llamaremos red asociada al filtro ψ, es $S_\psi := \{S_{(y,G)} = y\}_{(y,G)\in E}$. Esta red genera el filtro ψ (i.e. $\mathcal{F}_{S_\psi} = \psi$) que converge a x en X y, por tanto, $S_\psi \to x$.

Por otra parte si $\mathcal{F}$ es el filtro generado por la red $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ y ψ está generado por $\{S_{(y,G)}\}_{(y,G)\in E}$, entonces $e(\mathcal{F} \times \psi)$ es el filtro generado por la red $\{f_\alpha(S_{(y,G)})\}_{(\alpha,(y,G))\in D\times E}$ que converge a $f(x)$ porque estamos suponiendo b). Así pues $e(\mathcal{F} \times \psi)$ también converge a $f(x)$.

a)$\Rightarrow$b) Se consideran los filtros $\mathcal{F}_S$ y $\mathcal{F}_{S'}$, asociados a las redes $S := \{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ y $S' := \{x_\beta\}_{\beta\in E}$. Entonces $\{f_\alpha(x_\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in D\times E}$ es subred de $S_{e(\mathcal{F}_S\times\mathcal{F}_{S'})}$ que converge a $f(x)$ en Y.

$\square$

Si X e Y son topológicos tenemos otra caracterización equivalente ([71] (2.6)).

Proposición 2.1.2 *Sean X e Y espacios topológicos, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ una red en Y^X y $f \in Y^X$, entonces son equivalentes:*

a) $f_\alpha \overset{\Lambda_c}{\to} f$

b) Para cada $x \in X$ y para cada entorno V de $f(x)$, $\exists U$ entorno de x y $\exists \alpha_0 \in D$, tal que $f_\alpha(U) \subset V$, $\forall \alpha \geq \alpha_0$.

Demostración: Denotaremos por (X, Λ) y (Y, Λ_1) a los espacios de convergencia que se derivan de los espacios topológicos (X, τ) y (Y, τ_1) respectivamente.

Recordemos también que cuando una estructura de convergencia proviene de una topología, el filtro de entornos de un punto x del espacio converge a x y está contenido en cualquier otro filtro convergente a x.

a)⇒b) Sea $\mathcal{F}$ el filtro generado por la red $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$, es decir, $\forall F \in \mathcal{F}, \exists \alpha_0 \in D$ tal que $f_\alpha \in F, \forall \alpha \geq \alpha_0$. Estamos suponiendo $f_\alpha \overset{\Lambda_c}{\to} f$, por tanto $\mathcal{F} \overset{\Lambda_c}{\to} f$, y por definición de la estructura de convergencia continua: para cada $x \in X$ y para cada filtro ψ en X tal que $\psi \overset{\Lambda}{\to} x$, se cumple $e(\mathcal{F} \times \psi) \overset{\Lambda_1}{\to} f(x)$ en Y. Entonces, $\mathcal{B}(f(x)) \subset e(\mathcal{F} \times \psi)$ y, en particular, tomando $\psi = \mathcal{B}(x)$, $e(\mathcal{F} \times \psi)$ está generado por $\left\{ \bigcup_{\alpha\geq\alpha_0} f_\alpha(U) : U \in \mathcal{B}(x), \alpha_0 \in D \right\}$ y de aquí se deduce que para cada $x \in X$ y para cada $V \in \mathcal{B}(f(x))$, $\exists U \in \mathcal{B}(x)$ y $\exists \alpha_0 \in D$, tal que $f_\alpha(U) \subset V$, $\forall \alpha \geq \alpha_0$.

b)⇒a) Sea $\{x_\beta\}_{\beta\in E}$ una red convergente a $x \in X$.

Sea V un entorno de $f(x)$. Por b) existe U entorno de x y $\alpha_0 \in D$ tal que $f_\alpha(U) \subset V$, $\forall \alpha \geq \alpha_0$. A su vez, para U existe $\beta_0 \in E$ tal que $\forall \beta \geq \beta_0$, $x_\beta \in U$. Por tanto $\forall (\alpha, \beta) \geq (\alpha_0, \beta_0)$ se tiene que $f_\alpha(x_\beta) \in V$.

□

Comprobemos que la convergencia continua de redes es "hereditaria", en el sentido de la siguiente Proposición (i.e. que se cumple la condición R3).

Proposición 2.1.3 *Sean (X, Λ) y (Y, Λ_1) dos espacios de convergencia, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ una red en Y^X continuamente convergente a $f \in Y^X$, entonces todas sus subredes son continuamente convergentes a f.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{g_\mu\}_{\mu\in E}$ una subred de $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$. Para probar que $\{g_\mu\}_{\mu\in E}$ converge a f, por la Proposición 2.1.1 basta ver que, para toda red $\{x_\beta\}_{\beta\in F}$ en X, convergente a x, se cumple que $\{g_\mu(x_\beta)\}_{(\mu,\beta)\in E\times F}$ es convergente a $f(x)$ en Y.
Por ser $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ convergente a f, $\{f_\alpha(x_\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in D\times F}$ es convergente a $f(x)$. Veamos que $\{g_\mu(x_\beta)\}_{(\mu,\beta)\in E\times F}$ es subred de $\{f_\alpha(x_\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in D\times F}$, y como en Y todas las subredes de una red convergente son convergentes, quedaría probada la afirmación.
Por ser $\{g_\mu\}_{\mu\in E}$ subred de $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$, para cada $\alpha_0\in D$, existe $\mu_0\in E$ que cumple que $\forall\mu\in E$ con $\mu\geq\mu_0$, existe $\alpha\in D$ tal que $\alpha\geq\alpha_0$ y $f_\alpha=g_\mu$. En $E\times F$ y en $D\times F$ tenemos la dirección producto. Para cada $(\alpha_0,\beta_0)\in D\times F$, tomamos $(\mu_0,\beta_0)\in E\times F$ y se cumple que $\forall(\mu,\beta)\in E\times F$ con $(\mu,\beta)\geq(\mu_0,\beta_0)$, existe $(\alpha,\beta)\in D\times F$ tal que $(\alpha,\beta)\geq(\alpha_0,\beta_0)$ y $f_\alpha(x_\beta)=g_\mu(x_\beta)$. □

Veamos ahora que Λ_c satisface el axioma de Urysohn si Y lo satisface.

Proposición 2.1.4 *Sean (X,Λ) y (Y,Λ_1) dos espacios de convergencia. Si Y satisface el axioma de Urysohn, entonces la estructura de la convergencia continua también lo satisface (i.e. si $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una red en Y^X que no es continuamente convergente a $f\in Y^X$, entonces existe una subred tal que ninguna de sus subredes es continuamente convergente a f).*

DEMOSTRACIÓN: Si $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ no es continuamente convergente, entonces existe $\{x_\beta\}_{\beta\in B}$ en X, convergente a x, tal que $f_\alpha(x_\beta)$ no converge a $f(x)$ en Y. Tomamos $\{y_e\}_{e\in E}$ una subred de $\{f_\alpha(x_\beta)\}_{(\alpha,\beta)}$ tal que ninguna de sus subredes converge a $f(x)$, entonces para todo (α_0,β_0) existe e_0 tal que, para todo $e\geq e_0$, $y_e=f_\alpha(x_\beta)$ con $(\alpha,\beta)\geq(\alpha_0,\beta_0)$. Sea el subconjunto $D=\{\alpha\in A \text{ tal que } \exists\beta\in B \text{ y } e\in E \text{ con } f_\alpha(x_\beta)=y_e\}$ que es cofinal en A. Entonces, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ es una subred de $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$, tal que ninguna de sus subredes converge □

2.2 Convergencia diagonal

Algunos autores como Dugundji o Kelley definen la estructura de la convergencia continua de forma distinta, coincidiendo con lo que Wolk en [89] llama *convergencia diagonal.*

Sean (X,Λ) y (Y,Λ_1) espacios de convergencia, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ red en Y^X y $f\in Y^X$.

$\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ *converge diagonalmente* a f en $x\in X$ $\quad(f_\alpha \overset{\Lambda_d}{\to} f)$	$\Leftrightarrow$	para toda red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ convergente a x, se cumple que $\{f_\alpha(x_\alpha)\}_{\alpha\in D}$ converge a $f(x)$

Observemos que la diferencia se encuentra en que, en la convergencia diagonal, las redes $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ y $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ tienen el mismo conjunto de índices.

Vamos a ver con un ejemplo que, en general, la convergencia continua y la convergencia diagonal no son equivalentes.

Ejemplo 2.2.1 *([89] Example 2.3.)*
Sean ω el primer ordinal infinito, y ω_1 el primer ordinal no numerable,

$$X := \{\alpha \mid \alpha \leq \omega_1\}$$

$$Y := (\{\alpha \mid \alpha \leq \omega_1\} \times \{n \mid n \leq \omega\}) \cup \{u\}$$

donde X tiene la topología usual de los ordinales e Y es la unión disjunta de un punto aislado $\{u\}$ y del espacio producto correspondiente.
Vamos a definir una sucesión, $\{f_n\}_{n<\omega}$, de funciones de X en Y que converge diagonalmente pero que no es continuamente convergente:

$$\begin{array}{rccl} f_n\colon & X & \longrightarrow & Y \\ & \alpha & \mapsto & (\alpha, n) \ \ \textit{si } \alpha < \omega_1 \\ & \omega_1 & \mapsto & u \end{array}$$

Sea

$$\begin{array}{rccl} f\colon & X & \longrightarrow & Y \\ & \alpha & \mapsto & (\alpha, \omega) \ \ \textit{si } \alpha < \omega_1 \\ & \omega_1 & \mapsto & u \end{array}$$

Si cogemos $\{x_n\}_{n<\omega}$ una sucesión en X convergente a α, vamos a ver que $\{f_n(x_n)\}_{n<\omega}$ converge a $f(\alpha)$ en Y:
Si $\alpha \neq \omega_1$, $f_n(x_n) = (x_n, n) \to (\alpha, \omega) = f(\alpha)$;
Si $\alpha = \omega_1$, $\exists n_0$ tal que $x_n = \omega_1$, $\forall n \geq n_0$, entonces $f_n(\omega_1) = u \to u = f(\omega_1)$.
Cojamos ahora una red $\{x_m\}_{m\in E}$ en X convergente a ω_1 y tal que $x_m < \omega_1$ para todo m, entonces $\{f_n(x_m)\}_{(n,m)\in\omega\times E} \not\to f(\omega_1)$ en Y porque

$$f_n(x_m) = (x_m, n) \to (\omega_1, \omega) \qquad y \qquad f(\omega_1) = u$$

Proposición 2.2.2 *Sean X e Y espacios topológicos. Si una red $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ en Y^X converge continuamente a $f \in Y^X$, entonces también converge diagonalmente a f.*

Demostración: Sea $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ una red convergente a x en X. Por la Proposición 2.1.1 $\{f_\alpha(x_\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in D\times D}$ es convergente a $f(x)$ en Y. Por ser Y espacio topológico, para todo U entorno de $f(x)$, existe $(\alpha_0, \beta_0) \in D\times D$ tal que $f_\alpha(x_\beta) \in U$,

$\forall(\alpha,\beta) \geq (\alpha_0,\beta_0)$. Basta tomar $d_0 \geq \alpha_0$ y $d_0 \geq \beta_0$ y entonces $f_d(x_d) \in U$, $\forall d \geq d_0$.

□

Observación 5 *Esta Proposición también se cumple si X e Y son espacios de convergencia porque, de hecho, $\{f_\alpha(x_\alpha)\}_{\alpha\in D}$ es subred de $\{f_\alpha(x_\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in D\times D}$.*

Llamaremos *filtro elemental* al filtro engendrado por una sucesión.

Proposición 2.2.3 *Sean X e Y espacios topológicos, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y^X y $f \in Y^X$. Si X cumple el primer axioma de numerabilidad, entonces son equivalentes:*

a) $f_n \overset{\Lambda_c}{\to} f$

b) Para cada $x \in X$ y para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x en X, la sucesión $\{f_n(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f(x) en Y (i.e. $f_n \overset{\Lambda_d}{\to} f$).

Demostración:

a)⇒b) Es evidente a partir de la proposición anterior.

b)⇒a) Supongamos que $f_n \overset{\Lambda_c}{\not\to} f$, entonces existe una red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset X$ convergente a $x \in X$, tal que la red $\{f_n(x_\alpha)\}_{(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times A}$ no converge a $f(x)$. Tomemos $V \in \mathcal{B}(f(x))$ que no contenga eventualmente a la red. Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base de entornos de x tal que $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$ y sea $d_i \in A$ tal que para todo $\alpha > d_i$, $x_\alpha \in U_i$. Además $\{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ se puede coger creciente. Vamos a construir una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, convergente a x, tal que $f_n(y_n) \not\to f(x)$, lo que contradice que $f_n \overset{\Lambda_d}{\to} f$.
Para $(1,d_1) \in \mathbb{N}\times A$ existe $(m_1,\alpha_1) > (1,d_1)$ tal que $f_{m_1}(x_{\alpha_1}) \notin V$.
Para (m_1,d_{m_1}) elegimos un par $(m_2,\alpha_2) > (m_1,d_{m_1})$ tal que $f_{m_2}(x_{\alpha_2}) \notin V$.
Y procediendo así sucesivamente:

$$\begin{cases} x_{\alpha_1} \in U_1 \\ x_{\alpha_2} \in U_{m_1} \subseteq U_2 \\ \vdots \\ x_{\alpha_j} \in U_{m_{j-1}} \subseteq U_j \\ \vdots \end{cases}$$

tenemos una sucesión creciente de números naturales $J = \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$ y construimos la sucesión: $\begin{cases} y_n = x_{\alpha_i} & \text{si } n = m_i \in J \\ y_n = x & \text{en caso contrario} \end{cases}$, entonces $y_n \to x$ y está claro que $f_n(y_n) \not\to f(x)$.

Veamos también la demostración equivalente con filtros:
Sea $\mathcal{F}_S$ el filtro generado por $S := \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, la condición b) es equivalente a que para cada $x \in X$ y para cada filtro de base numerable ϕ en X tal que $\phi \xrightarrow{\Lambda} x$, se tiene que $e(\mathcal{F}_S \times \phi) \xrightarrow{\Lambda'} f(x)$ en Y. Queremos ver que esto se cumple para todo filtro ψ en X convergente a x.
Por ser ψ convergente a x, $\mathcal{B}(x) \subseteq \psi$, pero, por cumplir X el primer axioma de numerabilidad, $\mathcal{B}(x)$ es un filtro de base numerable y entonces, teniendo en cuenta que se cumple b), $e(\mathcal{F}_S \times \mathcal{B}(x)) \xrightarrow{\Lambda'} f(x)$. Y con esto tenemos $\mathcal{B}(f(x)) \subseteq e(\mathcal{F}_S \times \mathcal{B}(x)) \subseteq e(\mathcal{F}_S \times \psi)$.

□

Observación 6 *En la Proposición 2.2.3 se dice que si X cumple el primer axioma de numerabilidad, una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y^X converge continuamente si y sólo si converge diagonalmente. Más adelante veremos que, en dicho caso, la convergencia diagonal de sucesiones equivale a la convergencia en la topología compacto-abierta.*

A partir del ejemplo 2.2.1 podemos comprobar que la convergencia diagonal no verifica la condición R3).

Ejemplo 2.2.4 *Dada la sucesión $\{f_n\}_{n<\omega}$ del ejemplo anterior, convergente diagonalmente a f, vamos a dar una subred que no es diagonalmente convergente a f. Sea E el conjunto dirigido $\omega \times \omega_1$. Definimos $T_{(n,m)} = f_n$, veamos que $\{T_{(n,m)}\}_{(n,m)\in E}$ es una subred de $\{f_n\}_{n<\omega}$. Para todo $n_0 \in \omega$ existe $(n_0, m_0) \in \omega\times\omega_1$ tal que, para cada $(n,m) \geq (n_0, m_0)$, tenemos $n \in \omega$ que cumple $n \geq n_0$ y $T_{(n,m)} = f_n$. Sin embargo esta subred no converge diagonalmente a f porque si tomamos en X la red $\{x_{(n,m)} = m\}_{(n,m)\in E}$ claramente converge a ω_1, entonces*

$$T_{(n,m)}(x_{(n,m)}) = f_n(m) = (m,n) \to (\omega_1, \omega) \qquad y \qquad f(\omega_1) = u$$

Si para algún par de espacios X e Y, la convergencia diagonal en Y^X verifica R3), entonces la convergencia continua y la convergencia diagonal son equivalentes:

Proposición 2.2.5 *Sean X e Y espacios de convergencia, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ una red en Y^X y $f \in Y^X$, entonces son equivalentes:*

a) $f_\alpha \stackrel{\Lambda_c}{\rightarrow} f$

b) $f_\alpha \stackrel{\Lambda_d}{\rightarrow} f$ *y todas las subredes de* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ *son también diagonalmente convergentes a* f*.*

DEMOSTRACIÓN:

a)⇒b) Son las Proposiciones 2.2.2 (válida para espacios de convergencia por la Observación que le sigue) y 2.1.3.

b)⇒a) Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ que cumple b) y supongamos que no converge continuamente a f. Entonces existe una red $\{x_h\}_{h\in H}$ en X convergente a x y tal que $\{f_\alpha(x_h)\}_{(\alpha,h)\in D\times H} \not\rightarrow f(x)$ en Y. Las subredes $\{g_{(\alpha,h)} = f_\alpha\}_{(\alpha,h)\in D\times H}$ y $\{y_{(\alpha,h)} = x_h\}_{(\alpha,h)\in D\times H}$ de $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ y $\{x_h\}_{h\in H}$ respectivamente verifican $\{g_{(\alpha,h)}(y_{(\alpha,h)})\}_{(\alpha,h)\in D\times H} \not\rightarrow f(x)$ en Y, junto con $\{y_{(\alpha,h)}\}_{(\alpha,h)\in D\times H} \rightarrow x$, lo que contradice la hipótesis.

□

2.3 Relación de la convergencia continua y la convergencia diagonal con la topología compacto-abierta

Sean X e Y espacios topológicos y sea τ_{co} la *topología compacto-abierta* en el conjunto de funciones de X en Y (por definición τ_{co} es la topología cuya subbase es la familia $(K,V) := \{f \in Y^X \mid f(K) \subseteq V\}$, donde $K \subset X$ es un compacto y $V \subset Y$ es un abierto).

Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una red en Y^X,

$$f_\alpha \stackrel{\tau_{co}}{\rightarrow} f \Leftrightarrow \forall (K,V) \text{ con } f \in (K,V), \exists \alpha_0 \text{ tal que } \forall \alpha \geq \alpha_0, f_\alpha \in (K,V)$$

De forma análoga, si X es un espacio de convergencia, se puede definir la topología compacto-abierta con los compactos de convergencia de X, la designaremos como τ_{ko}.

Proposición 2.3.1 *Sean* X *e* Y *espacios topológicos,* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *una red en* Y^X *y* $f \in Y^X$*. Entonces,* $f_\alpha \stackrel{\Lambda_c}{\rightarrow} f \Rightarrow f_\alpha \stackrel{\tau_{co}}{\rightarrow} f$*.*

Demostración: Supongamos que $f_\alpha \overset{\tau_{co}}{\not\to} f$. Sea (K,U) un entorno de f que no contiene eventualmente a la red $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$, es decir, para todo α, existe $\alpha' \geq \alpha$ y $x_{\alpha'} \in K$ tal que $f_{\alpha'}(x_{\alpha'}) \notin U$.

Así $\{x_{\alpha'}\}_{\alpha'\in B} \in K$ es una red en un compacto. Existe una subred $\{y_\beta\}$ convergente a un cierto $y \in K$. Paralelamente se puede definir una subred de $\{f_{\alpha'}\}_{\alpha'\in B}$ mediante $g_\beta = f_{\alpha'}$ siempre que $y_\beta = x_{\alpha'}$. Ahora $g_\beta(y_\beta) \notin U \in \mathcal{B}_Y(f(y))$. Luego $g_\beta \overset{\Lambda_c}{\not\to} f$ y siendo subred de $\{f_\alpha\}$, en particular $f_\alpha \overset{\Lambda_c}{\not\to} f$. □

Sea $C_c(X)$ el conjunto de las funciones continuas de un espacio de convergencia (o topológico) X en $\mathbb{R}$, dotado con la estructura de la convergencia continua. Para un espacio topológico X localmente compacto, la topología compacto-abierta en $C(X)$ es admisible ([2]), de lo que se deduce:

Corolario 2.3.2 *Sea X un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff, entonces $C_c(X)$ es topológico y su topología es la compacto-abierta.*

Corolario 2.3.3 *Sea X un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff e Y un espacio métrico, entonces $C_c(X,Y)$ es topológico y su topología es la compacto-abierta.*

Demostración: Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una red en $C(X,Y)$ y $f \in C(X,Y)$. Tenemos que ver que $f_\alpha \overset{\tau_{co}}{\to} f \Rightarrow f_\alpha \overset{\Lambda_c}{\to} f$. Sea $\{x_\beta\}_{\beta\in B}$ una red en X convergente a x y sea $y \in Y$ fijo, consideremos para todo $x \in X$, $g_\alpha(x) = d(f_\alpha(x), y)$, $g(x) = d(f(x), y)$, funciones de X en $\mathbb{R}$ que verifican $g_\alpha \overset{\tau_{co}}{\to} g$. Entonces, por el Corolario anterior, $g_\alpha \overset{\Lambda_c}{\to} g$, luego $d(f_\alpha(x_\beta), y) = g_\alpha(x_\beta) \to g(x) = d(f(x), y)$, $\forall y \in Y$ y de aquí se deduce $f_\alpha(x_\beta) \to f(x)$. □

En [55] se estudia $C_c(X)$ para espacios de convergencia X. Entre otras cuestiones, se analiza la relación con la topología compacto-abierta. De [55] Teorema 3.9 y [2] podemos deducir lo siguiente:

Proposición 2.3.4 *Sea X un espacio topológico de Hausdorff completamente regular. Si $C_c(X)$ es topológico, su topología es la compacto-abierta respecto a X y X es localmente compacto.*

La hipótesis de regularidad es esencial en este resultado, como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.5 *Sea* $X_0 = Y = [0,1] \subset \mathbb{R}$ *con la topología usual y* $X = [0,1]$ *con la topología generada tomando como subbase los abiertos de la topología usual en* $[0,1]$*, junto con el conjunto* $D := [0,1] \setminus \{1/n : n = 1,2,\ldots\}$*.*
Observemos que X *no es regular.*
$C_c(X,Y)$ *es topológico pero su topología es la compacto-abierta respecto al espacio* X_0 *([3] Theorem 6.21).*

Teniendo en cuenta que todo grupo topológico de Hausdorff es completamente regular, obtenemos:

Proposición 2.3.6 *Si* G *es un grupo topológico de Hausdorff y* $C_c(G)$ *es topológico, entonces su topología es la compacto-abierta y* G *es localmente compacto.*

Vamos a estudiar ahora la convergencia diagonal de sucesiones.

Proposición 2.3.7 *Sean* X *e* Y *espacios topológicos,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* Y^X *y* $f \in Y^X$ *secuencialmente continua. Entonces,* $f_n \overset{\tau_{co}}{\to} f \Rightarrow f_n \overset{\Lambda_d}{\to} f$*.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $f_n \overset{\Lambda_d}{\not\to} f$, entonces, existe $x \in X$ y existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x en X, tal que la sucesión $\{f_n(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a f(x) en Y. Sea $V \subset Y$ un entorno abierto de $f(x)$, tal que $\forall n$, $\exists m_n > n$ tal que $f_{m_n}(x_{m_n}) \notin V$. Ahora consideramos el compacto $K := \{x_{m_n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$. Podemos suponer $f \in (K,V)$ porque, por ser f secuencialmente continua, $f(x_{m_n})$ converge a $f(x)$ en Y, entonces $\exists n_0$ tal que $f(x_{m_n}) \in V$, $\forall n \geq n_0$. Pero $f_n \overset{\tau_{co}}{\to} f$ y $f \in (K,V) \Rightarrow \exists n_0$ tal que $\forall n \geq n_0$, $f_n \in (K,V)$, es decir $f_n(K) \subseteq V$ y esto contradice la definición de K. □

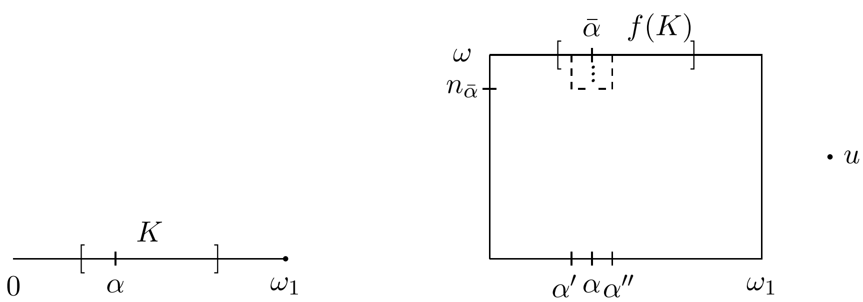
Corolario 2.3.8 *Sean* X *e* Y *espacios topológicos,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* Y^X *y* $f \in Y^X$ *secuencialmente continua. Si* X *cumple el primer axioma de numerabilidad, entonces,* $f_n \overset{\tau_{co}}{\to} f \Leftrightarrow f_n \overset{\Lambda_c}{\to} f$*.*

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que siempre se cumple $f_n \overset{\Lambda_c}{\to} f \Rightarrow f_n \overset{\tau_{co}}{\to} f$ (Proposición 2.3.1). Por la Proposición 2.3.7 tenemos también $f_n \overset{\tau_{co}}{\to} f \Rightarrow f_n \overset{\Lambda_d}{\to} f$. Y si además X cumple el primer axioma de numerabilidad, por la Proposición 2.2.3, $f_n \overset{\Lambda_d}{\to} f \Rightarrow f_n \overset{\Lambda_c}{\to} f$. □

El siguiente ejemplo nos sirve para ver que en el Corolario 2.3.8 es necesaria la hipótesis de que X cumpla el primer axioma de numerabilidad y que la Proposición 2.3.7 no se puede generalizar a redes.

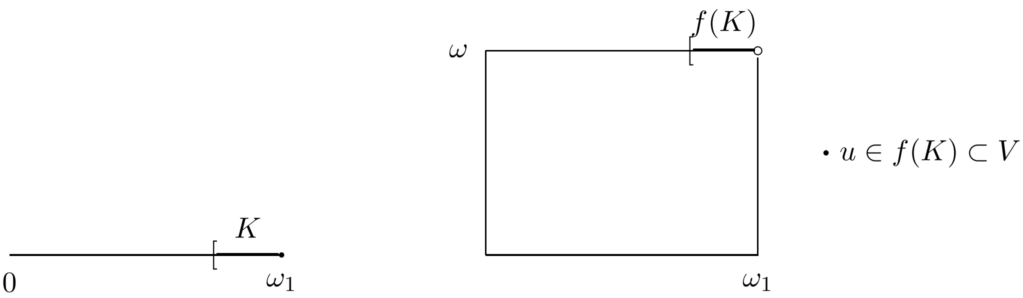
Ejemplo 2.3.9 *En el ejemplo 2.2.1 hemos dado una sucesión $\{f_n\}_{n<\omega}$ convergente puntualmente a una función f, hemos visto que converge diagonalmente a f pero que no converge continuamente y además (ejemplo 2.2.4), que tiene una subred $\{T_{(n,d)}\}_{(n,d)\in E}$, que no es diagonalmente convergente a f.*
Observemos también que f es secuencialmente continua pero no es continua y X no cumple el primer axioma de numerabilidad.
Vamos a demostrar ahora que $f_n \overset{\tau_{co}}{\to} f$.
Sean $K \subset X$ un compacto y $V \subset Y$ un abierto tal que $f(K) \subseteq V$. Queremos ver que existe n_0 tal que $\forall n \geq n_0$, $f_n(K) \subseteq V$. Para ello consideramos dos casos:

a) Si $\omega_1 \notin K$, entonces $f(K) = K \times \{\omega\}$ es compacto.



Para cada $\alpha \in K$ tomamos un abierto básico de $\bar{\alpha} := f(\alpha) = (\alpha, \omega) \in f(K)$ contenido en V, $V_{\bar{\alpha}} = (\alpha', \alpha'') \times (n_{\bar{\alpha}}, \omega]$ con $\alpha' < \alpha < \alpha''$. Tenemos ahora $f(K) \subseteq \bigcup_{\alpha\in K} V_{\bar{\alpha}} \subseteq V$ y para cada $\alpha \in X$ se cumple que existe $n_{\bar{\alpha}}$ tal que para todo $n > n_{\bar{\alpha}}$, $f_n(\alpha) \in V_{\bar{\alpha}}$. Por ser $f(K)$ compacto podemos extraer un subrecubrimiento finito $\{V_{\bar{\alpha}_i} : \bar{\alpha}_i \in f(K)\}$ que nos permite tomar $n_0 = \max\{n_{\bar{\alpha}_i} : \bar{\alpha}_i \in f(K)\}$, que es el que buscábamos.

b) Si $\omega_1 \in K$, dado V abierto tal que $f(K) \subset V$, como $f(\omega_1) = u$, claramente $u \in V$.



Consideramos $K \setminus \omega_1$, cerrado de $[0, \omega_1)$ que es numerablemente compacto y secuencialmente compacto.
Supongamos que $f_n \overset{\tau_{co}}{\not\to} f$, es decir, $\forall n$, $\exists m' > n$ con $f_{m'}(K) \not\subset V$, sea $\alpha_{m'} \in K$ tal que $f_{m'}(\alpha_{m'}) \notin V$. Obviamente $\alpha_{m'} \in K \setminus \omega_1$ y entonces existe una subsucesión $\alpha_{p_{m'}} \to \alpha \in K \setminus \omega_1$. Formamos la sucesión (β_n) con $\beta_n = \alpha_{p_{m'}}$ si $n = p_{m'}$ para algún $p_{m'}$ y $\beta_n = \alpha$ si $n \notin \{p_{m'}\}$. Y ahora tenemos $\beta_n \to \alpha$ y $f(\alpha) \in f(K) \subset V$, pero $\forall n$, $\exists n' = p_{m'} > n$ tal que $f_{n'}(\beta_{n'}) \notin V$, lo que contradice que $f_n \overset{\Lambda_d}{\to} f$.

En resumen, tenemos una sucesión tal que $f_n \overset{\tau_{co}}{\to} f$ y $f_n \overset{\Lambda_c}{\not\to} f$ y una red $T_{(n,d)} \overset{\tau_{co}}{\to} f$ con $T_{(n,d)} \overset{\Lambda_d}{\not\to} f$.

2.4 Dual de convergencia

Sea G un grupo de convergencia (o en particular un grupo topológico). Se llaman *caracteres* a los homomorfismos del grupo en el toro unidimensional $\mathbb{T}$ y *dual* de G al conjunto de caracteres continuos, que denotaremos por ΓG. Dicho conjunto, dotado con la suma de caracteres definida puntualmente, es un grupo.

Denotaremos por $\Gamma_c G$ al conjunto ΓG con la estructura de la convergencia continua, Λ_c. $\Gamma_c G$ es un grupo de convergencia que llamaremos *dual de convergencia* de G. Así, también, el *bidual de convergencia* es $\Gamma_c \Gamma_c G := \Gamma_c(\Gamma_c G)$.

Concretaremos las ideas vistas ahora para el caso en que X es un grupo de convergencia (o topológico), Y el toro unidimensional y el subconjunto de $C(X, Y)$ considerado es precisamente la familia de homomorfismos continuos, ΓG.

Grupos topológicos metrizables

Un grupo topológico G es metrizable si y sólo si cumple el primer axioma de numerabilidad. Si G es un grupo metrizable, en el conjunto $\Gamma G \subset C(G, \mathbb{T})$, se tiene:

1. Λ_c y τ_{co} tienen las mismas sucesiones convergentes (Corolario 2.3.8).
2. $\tau_{co} = \tau_{\Lambda_c}$ ([28]).
3. Por 1. y 2., Λ_c y τ_{Λ_c} tienen las mismas sucesiones convergentes. Sin embargo no tienen las mismas redes convergentes, como demuestra el ejemplo de un grupo G que, además de metrizable, sea reflexivo y no localmente compacto. Para dicho G, la evaluación $e\colon (\Gamma G, \tau_{co}) \times G \to \mathbb{T}$ no es continua (cfr. [63]).

Capítulo 3

Introducción a la dualidad en grupos topológicos y de convergencia

En el estudio de dualidad en grupos topológicos destacan los siguientes resultados (cfr. por ejemplo [66]):

- Con la topología compacto-abierta, el dual de un grupo localmente compacto es localmente compacto.
- El Teorema de dualidad de Pontryagin establece que la aplicación canónica de un grupo topológico abeliano localmente compacto en su bidual, es un isomorfismo topológico.

Desde la perspectiva de estos hechos, la topología estándar del dual de un grupo topológico G es la compacto-abierta. Denotaremos por $G^\wedge$ a ΓG con la topología compacto-abierta y lo denominaremos *dual topológico* de G. El *bidual topológico* es $G^{\wedge\wedge} := (G^\wedge)^\wedge$. Por analogía con el Teorema de dualidad de Pontryagin, se llama *reflexivo (en sentido Pontryagin)* a todo grupo canónicamente isomorfo a su bidual, es decir, cuando la aplicación $\alpha_G\colon G \to G^{\wedge\wedge}$ definida por $(\alpha_G(g))(\chi) := \chi(g)$ es isomorfismo topológico.

También se puede considerar, en el dual de un grupo topológico, la estructura de la convergencia continua. No es en general topológica, pero sí lo es en los grupos localmente compactos, coincidiendo, en este caso, con la topología compacto-abierta. Dicha estructura es bastante natural ya que es la menos fina que hace continua la evaluación $e\colon \Gamma G \times G \to \mathbb{T}$, y da lugar al grupo de convergencia $\Gamma_c G$.

Si G es grupo topológico se verifica $\Gamma(G^\wedge) \subseteq \Gamma(\Gamma_c G)$. En efecto, sea $\varphi \in \Gamma(G^\wedge)$, un carácter τ_{co}-continuo, y $(\xi_\alpha) \subset \Gamma_c G$ una red tal que $\xi_\alpha \overset{\Lambda_c}{\to} \xi$, entonces $\xi_\alpha \overset{\tau_{co}}{\to} \xi$ y $\varphi(\xi_\alpha) \to \varphi(\xi)$, luego $\varphi \in \Gamma(\Gamma_c G)$.

Definimos el *polar* de un subconjunto S de un grupo de convergencia G, como:

$$S^o := \{\chi \in \Gamma G : Re(\chi(x)) \geq 0, \ \forall x \in S\}$$

y el *anulador* de S como:

$$S^\perp := \{\chi \in \Gamma G : \chi(S) = \{1\}\}.$$

Claramente, si S es un subgrupo de G, entonces $S^o = S^\perp$ es un subgrupo de ΓG.

Para subconjuntos X de ΓG tenemos:

$$\begin{aligned} {}^oX &:= \{g \in G : Re(\chi(g)) \geq 0, \forall \chi \in X\} \\ X^o &:= \{\varphi \in \Gamma(\Gamma_c G) : Re(\varphi(\chi)) \geq 0, \forall \chi \in X\} \end{aligned}$$

Si G es un grupo topológico, tiene sentido considerar también:

$$X^\diamond := \{\varphi \in \Gamma(G^\wedge) : Re(\varphi(\chi)) \geq 0, \forall \chi \in X\}$$

En general, se verifica $X^\diamond \subset X^o$.

Llamaremos *bipolar* de $S \subset G$ al subconjunto de $\Gamma(\Gamma_c G)$, $S^{oo} := (S^o)^o$.

En 3.0.4 demostraremos que S^o y X^o son cerrados en la topología compacto-abierta.

Si K es un subgrupo compacto de G, se da la igualdad $K^{o\diamond} = K^{oo}$. En efecto, $\varphi \in K^{oo}$ es un carácter continuo de $\Gamma_c G$ tal que $\varphi_{|K^o} = 1$. Así pues, φ restringido a K^o, que es un subgrupo abierto de $G^\wedge$, es continuo y por tanto $\varphi \colon G^\wedge \to \mathbb{T}$ es también continuo.

Designaremos por κ_G a la inclusión canónica de un grupo G en su bidual de convergencia $\Gamma_c\Gamma_c G$. Precisamente, una de las ventajas de usar la estructura de la convergencia continua en lugar de la topología compacto-abierta es que κ_G siempre es continua.

Lema 3.0.1 *Sea G un grupo de convergencia y $X \subset \Gamma G$ un subconjunto, entonces $\kappa_G({}^oX) = X^o \cap \kappa_G(G)$.*
Si además G es topológico, también $\alpha_G({}^oX) = X^\diamond \cap \alpha_G(G)$.

Demostración: Sea $\xi = \kappa_G(g)$, entonces $g \in {}^oX \iff Re(\chi(g)) \geq 0, \forall\chi \in X \iff Re(\kappa_G(g)(\chi)) \geq 0, \forall\chi \in X \iff \xi \in X^o \cap \kappa_G(G)$. □

Diremos que G *tiene suficientes caracteres continuos* o que ΓG *separa puntos* si para todo $g \in G$ con $g \neq 0$, existe $\varphi \in \Gamma G$ tal que $\varphi(g) \neq 1$.

- Las aplicaciones α_G y κ_G son inyectivas si y sólo si G tiene suficientes caracteres continuos.
- Se da la igualdad de conjuntos $\alpha_G(G) = \kappa_G(G)$ y, por tanto, si κ_G es sobre, α_G también lo es.

Diremos que un subgrupo H de un grupo de convergencia (G, Λ) es *dualmente cerrado* si, para todo elemento x de $G \setminus H$, existe un carácter continuo $\varphi \in \Gamma G$ tal que $\varphi(H) = 1$ y $\varphi(x) \neq 1$. Y diremos que H es *dualmente sumergido* si todo carácter continuo definido en H se puede extender a un carácter continuo de G. Observemos que estas nociones no dependen de la estructura que consideremos en ΓG. Es fácil probar que un subgrupo cerrado H de un grupo de convergencia G es dualmente cerrado si y sólo si el grupo cociente G/H tiene suficientes caracteres continuos.

Lema 3.0.2 *Sea G un grupo de convergencia y H un subgrupo de G. Si H es dualmente cerrado, entonces $\kappa_G(H) = H^{oo} \cap \kappa_G(G)$. Además, si G tiene suficientes caracteres continuos, se verifica el recíproco.*

Demostración: El contenido $\kappa_G(H) \subset H^{oo} \cap \kappa_G(G)$ se demuestra directamente. Supongamos que H es dualmente cerrado y sea $\xi \in H^{oo} \cap \kappa_G(G)$. Entonces existe $z \in G$ tal que $\xi = \kappa_G(z)$ y se cumple que $z \in H$ ya que, de lo contrario existiría $\varphi \in \Gamma G$ tal que $\varphi(H) = \{1\}$ y $\varphi(z) \neq \{1\}$, luego $\xi = \kappa_G(z) \notin H^{oo}$.
Recíprocamente, si G tiene suficientes caracteres continuos, κ_G es inyectiva, y entonces, si $z \notin H$, $\kappa_G(z) \in \kappa_G(G) \setminus \kappa_G(H)$. Por tanto, $\kappa_G(z) \notin H^{oo}$ y existe $\varphi \in H^o$ tal que $\varphi(z) = \kappa_G(z)(\varphi) \neq 1$. □

Sea $f: G \to G'$ un homomorfismo continuo de grupos de convergencia. Igual que para grupos topológicos se tiene la aplicación $f^\wedge: G'^\wedge \to G^\wedge$, tenemos aquí la *aplicación dual* $\Gamma f: \Gamma_c G' \to \Gamma_c G$ definida por $(\Gamma f(\chi))(g) := (\chi \circ f)(g)$, que es un homomorfismo continuo ([26]). Si f es sobre, Γf es inyectiva y si f es isomorfismo bicontinuo, Γf también lo es.

Si H es un subgrupo de un grupo de convergencia G, sea $i: H \to G$ la inclusión y si H es cerrado, designamos como $p: G \to G/H$ a la proyección canónica. De sus aplicaciones duales, Γi y Γp, obtenemos los homomorfismos naturales $\Psi_H: \Gamma_c G/H^o \to \Gamma_c H$ y $\Phi^H: \Gamma_c(G/H) \to H^o$. Observemos que Φ^H es un isomorfismo continuo y, si H es dualmente sumergido, Ψ_H es también isomorfismo continuo. Vamos a demostrar ahora que Φ^H tiene inversa continua y más adelante veremos que, si H es abierto, Ψ_H también tiene inversa continua (Corolario 3.3.10).

Proposición 3.0.3 *Si G es un grupo de convergencia, el homomorfismo $\Phi^H: \Gamma_c(G/H) \to H^o$ es un isomorfismo bicontinuo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{F} \to 0$ en H^o. El filtro $(\Phi^H)^{-1}(\mathcal{F})$ es convergente a 0, en $\Gamma_c(G/H)$, si y sólo si $e_{G/H}((\Phi^H)^{-1}(\mathcal{F}) \times \mathcal{H}) \to 1$ en $\mathbb{T}$, para todo filtro $\mathcal{H} \to [x]$ en G/H. Y esto se verifica porque, por definición de estructura cociente, $\mathcal{H} \supset \bigcap_{i=1}^{r} p(\mathcal{L}_i)$ para algunos filtros $\mathcal{L}_i \to z_i$ con $z_i \in p^{-1}([x])$, entonces $e_{G/H}((\Phi^H)^{-1}(\mathcal{F}) \times \mathcal{H}) \supset e_{G/H}((\Phi^H)^{-1}(\mathcal{F}) \times \bigcap_{i=1}^{r} p(\mathcal{L}_i)) = e_G(\mathcal{F} \times \bigcap_{i=1}^{r} \mathcal{L}_i) \to 1$ en $\mathbb{T}$. □

Observemos que el isomorfismo bicontinuo Φ^H se obtiene para todo grupo de convergencia, sin embargo eso no es así, en general, en el caso de grupos topológicos, para el isomorfismo análogo $\varphi^H: (G/H)^\wedge \to H^o$, que no es siempre abierto.

Un grupo de convergencia diremos que es *reflexivo en sentido Binz Butzmann* (*BB-reflexivo*) si $\kappa_G: G \to \Gamma_c\Gamma_c G$ es un isomorfismo de grupos de convergencia. En particular, para grupos topológicos, la noción de BB-reflexividad, también tiene sentido y es independiente de la noción de reflexividad en el sentido ordinario de Pontryagin (cfr. [29]). No obstante coinciden para la clase de los grupos topológicos localmente compactos. En efecto, al coincidir la convergencia continua con la convergencia de la topología compacto-abierta, el dual topológico y el dual de convergencia son el mismo. Para un grupo metrizable G se demuestra en [28] que G es reflexivo en sentido Pontryagin si y sólo si es BB-reflexivo. Obsérvese que en este caso, si G no es localmente compacto, ya no se puede afirmar que $\Gamma_c G$ y $G^\wedge$ sean iguales. No obstante se puede afirmar que la BB-reflexividad y la reflexividad en sentido Pontryagin coinciden en la clase de los grupos localmente compactos y en la de los metrizables.

A fin de disponer de más ejemplos de grupos topológicos mencionamos ahora la *topología de Bohr* de un grupo topológico G. Es la topología menos fina de todas aquéllas que hacen continuos los caracteres de G. Suele designarse por $\omega(G,\Gamma G)$ o por τ^+ y es una topología de grupo. Por G^+ entenderemos (G,τ^+). La topología de Bohr en el grupo aditivo de los reales, $\mathbb{R}$, es distinta de la usual; esto se deduce inmediatamente del hecho de que G^+ es precompacto para cualquier grupo topológico G.

En ΓG también se consideran las topologías débiles, $\omega(\Gamma G, G) \subseteq \omega(\Gamma G, \Gamma G^\wedge) \subseteq \omega(\Gamma G, \Gamma\Gamma_c G)$. Denotaremos por $\Gamma_\omega G$ a $(\Gamma G, \omega(\Gamma G, G))$.

Lema 3.0.4 *Sea G un grupo topológico y sean $H \subset G$ y $L \subset \Gamma G$ dos subconjuntos, entonces*

a) H^o es $\omega(\Gamma G, G)$-cerrado

b) ${}^oL$ es $\omega(G, \Gamma G)$-cerrado

Demostración:

a) Sea $(\chi_\alpha)_\alpha$ una red en H^o, $\omega(\Gamma G, G)$-convergente a χ, y sea $x \in H$. Entonces $\chi_\alpha(x) \to \chi(x)$ y, para todo α, $Re(\chi_\alpha(x)) \geq 0$, lo que implica $Re(\chi(x)) \geq 0$, luego $\chi \in H^o$.

b) Sea $(x_\alpha)_\alpha$ una red en ${}^oL$, $\omega(G, \Gamma G)$-convergente a x, y sea $\varphi \in L$. Entonces, $\varphi(x_\alpha) \to \varphi(x)$ y $Re(\varphi(x_\alpha)) \geq 0$, para todo α, implica que $Re(\varphi(x)) \geq 0$, luego $\varphi \in {}^oL$.

$\square$

Lema 3.0.5 *Sea H un subgrupo de un grupo topológico G, entonces la $\omega(G, \Gamma G)$-clausura de H es* $\overline{H}^\omega = \bigcap_{\chi \in H^o} \chi^{-1}(1)$.

Demostración:

$\subseteq$) Sea $x \in \overline{H}^\omega$, entonces existe una red $(x_\beta) \subset H$ que es $\omega(G, \Gamma G)$-convergente a x. Si $\chi \in H^o$, $\chi(x_\beta) = 1$, $\forall \beta$, luego $\chi(x) = 1$ y $x \in \bigcap_{\chi \in H^o} \chi^{-1}(1)$.

$\supseteq$) Si $x \notin \overline{H}^\omega$, existe un $\omega(G, \Gamma G)$-entorno de x, V, tal que $V \cap H = \emptyset$. Sea $V_{\{\chi_1, \ldots, \chi_n; \varepsilon\}} = \{z \in G : |\chi_i(z - x)| < \varepsilon, \forall i = 1, \ldots, n\}$. Definimos $F\colon G \to \mathbb{T}^n$

como $F(g) = (\chi_1(g), \ldots, \chi_n(g))$. Entonces $F(H)$ es subgrupo de $\mathbb{T}^n$ y si tomamos $g \in G$ que verifique $|\chi_i(g - x)| < \varepsilon$, $g \notin H$. Por tanto, tenemos un entorno $\{(t_i) \in \mathbb{T}^n : |t_i - \chi_i(x)| < \varepsilon, \forall i = 1, \ldots, n\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}^n}(F(x))$ disjunto con $F(H)$, así $F(x) \notin \overline{F(H)}$. Como en $\mathbb{T}^n$ todo subgrupo cerrado es dualmente cerrado, existe un carácter η de $\mathbb{T}^n$ tal que $\eta(\overline{F(H)}) = \{1\}$ y $Re(\eta(F(x))) < 0$. Esto nos da un carácter ηF de G tal que $\eta F \in H^o$ y $\eta F(x) \neq 1$. Luego $x \notin \bigcap_{\chi \in H^o} \chi^{-1}(1)$.

□

Corolario 3.0.6 *Un subgrupo cerrado de un grupo topológico, G, es dualmente cerrado si y sólo si es $\omega(G, \Gamma G)$-cerrado.*

Corolario 3.0.7 *Si L es un subconjunto de ΓG, entonces:*
${}^o(L^o)$ *es* $\omega(\Gamma G, \Gamma\Gamma_c G)$*-cerrado,*
${}^o(L^\diamond)$ *es* $\omega(\Gamma G, \Gamma G^\wedge)$*-cerrado,*
$({}^oL)^\diamond$ *y* $({}^oL)^o$ *son* $\omega(\Gamma G, G)$*-cerrados.*
Y se verifica la relación ${}^o(L^o) \subseteq {}^o(L^\diamond) \subseteq ({}^oL)^\diamond \subseteq ({}^oL)^o$.

3.1 Equicontinuidad y compacidad en el dual de un grupo topológico

Sea G un grupo topológico y $H \subset \Gamma G$ un subconjunto. Recordemos la definición de equicontinuidad en el grupo de los caracteres continuos de G en $\mathbb{T}$:

H es *equicontinuo* en $x \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1), \exists U \in \mathcal{B}_G(x)$ tal que $f(U) \subseteq f(x) \cdot V, \ \forall f \in H$

H es *equicontinuo* si es equicontinuo en x, para todo $x \in G$.
Por tratarse de morfismos entre grupos topológicos podemos decir que H es *equicontinuo* si es equicontinuo en 0:

H es *equicontinuo* (en 0) $\iff \forall V \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1), \exists U \in \mathcal{B}_G(0)$ tal que $f(U) \subseteq V, \ \forall f \in H$

Observemos que esta definición sólo depende de la estructura topológica de G. No depende de la estructura que consideremos en ΓG.

Se comprueba fácilmente que la equivalencia entre equicontinuos y relativamente τ_{co}-compactos en el dual de un grupo topológico $G^\wedge$ equivale a que el encaje canónico α_G de G en el bidual $G^{\wedge\wedge}$ sea una aplicación continua (Teorema 3.1.9). Como el encaje $\kappa_G \colon G \to \Gamma_c\Gamma_c G$ siempre es continuo, cabe esperar que haya equivalencia entre equicontinuos y relativamente compactos en $\Gamma_c G$. Probamos a continuación este hecho, y obtenemos asímismo que la continuidad de α_G equivale a la igualdad de las familias de τ_{co}-compactos y Λ_c-compactos.

El Teorema de Ascolí aplicado a ΓG nos da la siguiente propiedad de los equicontinuos del dual topológico de un grupo.

Proposición 3.1.1 *Sea $K \subseteq \Gamma G$ un subconjunto τ_{co}-cerrado. Si K es equicontinuo, entonces K es τ_{co}-compacto.*

Lema 3.1.2 *Sea $H \subseteq \Gamma G$ un subconjunto equicontinuo y sea $\mathcal{F}$ un filtro que converge puntualmente a f en ΓG tal que $H \in \mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}$ es Λ_c-convergente a f. En particular, si $\mathcal{F}$ es τ_{co}-convergente a f también se verifica la tesis.*

Demostración: Queremos ver $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}(f(x)) \subset e(\mathcal{F} \times \mathcal{B}_G(x))$ para todo $x \in G$. Sea $V \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(f(x))$ abierto tal que $(f(x))^{-1} \cdot V = W \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1)$ y verifica $WW \subset W$ y $W^{-1} = W$. Por ser $\mathcal{F}$ puntualmente convergente a f, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset (\{x\}, V)$ (i.e. $\chi(x) \in V$, $\forall \chi \in F$). Como $H \in \mathcal{F}$ es equicontinuo, el conjunto $F \cap H$ es equicontinuo y cumple que $\forall \chi \in F \cap H$, $\chi(x) \in V$. Por tanto existe $U \in \mathcal{B}_G(x)$ tal que $\forall \chi \in F \cap H$, $\chi(U) \subset \chi(x) \cdot W$ (i.e. $e((F \cap H) \times U) \subset V$). □

Proposición 3.1.3 *Sea $K \subseteq \Gamma G$ un subconjunto τ_{co}-cerrado. Si K es equicontinuo, entonces K es Λ_c-compacto.*

Demostración: Sea $\mathcal{F}$ un filtro en K. Por la Proposición 3.1.1, existe $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ τ_{co}-convergente a f en K y aplicando el lema anterior, $\mathcal{G}$ es también Λ_c-convergente a f en K. □

Proposición 3.1.4 *Sea $U \in \mathcal{B}_G(0)$, entonces U^o es equicontinuo.*

Demostración: Si $B_1 := \{z \in \mathbb{T} : Re(z) \geq 0\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1)$, $\varphi(U) \subseteq B_1$ para todo $\varphi \in U^o$. Sea $V \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1)$ entorno básico, simétrico y conexo. Si $V \supseteq B_1$, basta tomar el mismo U. Y si $V \subset B_1$, existe n tal que $V^n \supset B_1$. Tomamos entonces $L = \dfrac{1}{n}U$, es decir un entorno de cero en G tal que $L + \overset{n)}{\cdots} + L \subset U$ y se tiene $\varphi(L) \subseteq B_1, \varphi(L+L) \subseteq B_1, \ldots, (\varphi(L))^n = \varphi(L + \overset{n)}{\cdots} + L) \subseteq B_1 \subseteq V^n$, para todo $\varphi \in U^o$. Luego $\varphi(L) \subseteq V$. □

Es conocido también que U^o es τ_{co}-compacto ([68] Lemma 2.2), entonces de las Proposiciones 3.1.3 y 3.1.4 se deduce que U^o es Λ_c-compacto.

Lema 3.1.5 *([30] Corollary 1.3)*
Sea $B \subset \Gamma G$ un subconjunto de un grupo topológico, son equivalentes:

a) B es equicontinuo,

b) existe $U \in \mathcal{B}_G(0)$ tal que $B \subseteq U^o$,

c) ${}^oB$ es entorno de 0 en G.

Proposición 3.1.6 *Sea $K \subseteq \Gamma_c G$. Si K es Λ_c-compacto, entonces es equicontinuo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que K no es equicontinuo, y sea $W \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1)$ tal que, para cada $U \in \mathcal{B}_G(0)$, existen $f_U \in K$ y $x_U \in U$ con $f_U(x_U) \notin W$.
Tomando $D := \mathcal{B}_G(0)$ como conjunto dirigido respecto a la relación $\supseteq$, podemos considerar que $\{x_U\}_{U\in D}$ es una red en G, convergente a 0 y que $\{f_U\}_{U\in D}$ es una red en K. Probaremos que esta última no tiene subredes Λ_c-convergentes, lo que contradice que K sea Λ_c-compacto.
Sea $\{g_e\}_{e\in E}$ una subred de $\{f_U\}_{U\in D}$, es decir, para todo $U \in D$, existe $e_0 \in E$ tal que, para todo $e_1 \geq e_0$, existe $U_1 \in D$ con $U_1 \subseteq U$ tal que $g_{e_1} = f_{U_1}$.
Para cada $(e, U) \in E \times D$ tomamos $e_1 \geq e_0, e$ y U_1 tal que $(e_1, U_1) \geq (e, U)$ y entonces existe $x_{U_1} \in U_1$ tal que $g_{e_1}(x_{U_1}) = f_{U_1}(x_{U_1}) \notin W$. Por tanto $g_e(x_U) \not\to 0$.
$\square$

De la Proposición 3.1.6 y del Lema 3.1.2 se deduce:

Corolario 3.1.7 *En los equicontinuos y, en particular, en los Λ_c-compactos de ΓG la estructura de la convergencia continua es topológica y coincide con la topología compacto-abierta y con la de la convergencia puntual.*

Como consecuencia de las Proposiciones 3.1.6 y 3.1.1 podemos formular el siguiente teorema.

Teorema 3.1.8 *Sea $K \subseteq \Gamma G$ un subconjunto τ_{co}-cerrado.*
Entonces, K es Λ_c-compacto si y sólo si K es equicontinuo.

Vemos a continuación que siempre que hay coincidencia de las familias de Λ_c-compactos y τ_{co}-compactos en ΓG, también hay coincidencia de las correspondientes estructuras inducidas en ellos.

Teorema 3.1.9 *Sea G un grupo topológico. Son equivalentes:*

1. $\alpha_G \colon G \to G^{\wedge\wedge}$*, es continua,*
2. *los τ_{co}-compactos de ΓG coinciden con los equicontinuos τ_{co}-cerrados y con los Λ_c-compactos,*
3. $\forall K \subset \Gamma G$ *τ_{co}-compacto y toda red $(\xi_\alpha) \subset K$, se verifica: $\xi_\alpha \overset{\Lambda_c}{\to} \xi$ si y sólo si $\xi_\alpha \overset{\tau_{co}}{\to} \xi$.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que si $S \subset G^\wedge$, entonces, para todo $V \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1)$, $(S,V) \subset G^{\wedge\wedge}$ y $\alpha_G^{-1}((S,V)) = \bigcap\limits_{\tau \in S} \tau^{-1}(V)$.

1. $\Rightarrow$ 2. Si α_G es continua y S es τ_{co}-compacto, entonces $\alpha_G^{-1}((S,V))$ es un entorno de 0 en G. Así, por la observación anterior, se cumple que para todo $V \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1)$, existe $U := \alpha_G^{-1}((S,V))$ tal que $\tau(U) \subseteq V$, $\forall \tau \in S$. Luego S es equicontinuo. Además, si los τ_{co}-compactos de ΓG son equicontinuos, por ser τ_{co}-cerrados, son también Λ_c-compactos (Proposición 3.1.3).

2. $\Rightarrow$ 1. Sea $S \subset \Gamma G$ τ_{co}-compacto y sea $V \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1)$. Por 2. S es equicontinuo, luego existe $U \in \mathcal{B}_G(0)$ tal que $\tau(U) \subseteq V$, $\forall \tau \in S$. Esto significa que $U \subset \bigcap\limits_{\tau \in S} \tau^{-1}(V) = \alpha_G^{-1}((S,V))$, con lo cual $\alpha_G^{-1}((S,V)) \in \mathcal{B}_G(0)$ y α_G es continua.

2. $\Rightarrow$ 3. Una red Λ_c-convergente es siempre τ_{co}-convergente.
Recíprocamente, sea $(\xi_\alpha) \subset K$ tal que $\xi_\alpha \overset{\tau_{co}}{\to} \xi$. Por 2. K es también Λ_c-compacto, (ξ_α) posee una subred, (ξ_β), Λ_c-convergente. Entonces $\xi_\beta \overset{\Lambda_c}{\to} \eta$ implica $\xi_\beta \overset{\tau_{co}}{\to} \eta$. Pero $G^\wedge$ es de Hausdorff, luego $\eta = \xi$. Aplicando el mismo razonamiento a cada subred de (ξ_α), obtenemos que toda subred posee a su vez una subred Λ_c-convergente a ξ y por tanto $\xi_\alpha \overset{\Lambda_c}{\to} \xi$, ya que $\Gamma_c G$ satisface el axioma de Urysohn.

3. $\Rightarrow$ 2. Por la caracterización de los compactos a través de la convergencia de redes, si en un τ_{co}-compacto K las redes τ_{co}-convergentes y las Λ_c-convergentes coinciden, K es también Λ_c-compacto. $\square$

En el siguiente resultado de Noble se da una condición suficiente para la continuidad de α_G.

Teorema 3.1.10 *([68] 2.3)*
Si G es k-grupo, entonces α_G es continua.

La proposición recíproca no es cierta. En [68] también se comenta el ejemplo de un grupo reflexivo que no es k-grupo.

Para grupos metrizables la familia de los τ_{co}-compactos del dual coincide con la de los τ_{pc}-compactos, siendo τ_{pc} la topología de la convergencia uniforme en los precompactos. Además, eso lleva consigo que coinciden los respectivos duales algebraica y topológicamente.

Proposición 3.1.11 *Sea G un grupo metrizable y sean τ_{co} y τ_{pc} las topologías en ΓG de la convergencia uniforme en los compactos y en los precompactos de G, respectivamente. Entonces:*

a) Los compactos de $(\Gamma G, \tau_{co})$ y de $(\Gamma G, \tau_{pc})$ coinciden.

b) $(\Gamma G, \tau_{co})^\wedge = (\Gamma G, \tau_{pc})^\wedge$.

DEMOSTRACIÓN: Por ser $\tau_{co} < \tau_{pc}$, todo τ_{pc}-compacto es τ_{co}-compacto. Sea $K \subset \Gamma G$ τ_{co}-compacto. Como G es metrizable, α_G es continua y K es equicontinuo. Luego existe $V \in \mathcal{B}_G(0)$ tal que $K \subset V^o$. Pero V^o es τ_{pc}-compacto ([8] 1.5) y K es τ_{pc}-cerrado, por tanto K es τ_{pc}-compacto. Obsérvese además que τ_{co} y τ_{pc} inducen la misma topología en los compactos.
Sea ahora $f\colon (\Gamma G, \tau_{pc}) \to \mathbb{T}$ un carácter continuo, en particular $f_{|K}$ es τ_{pc}-continuo, y en consecuencia τ_{co}-continuo, para todo K compacto en $(\Gamma G, \tau_{co})$. Siendo $(\Gamma G, \tau_{co})$ k-espacio, obtenemos que f es τ_{co}-continuo. Luego $\Gamma(\Gamma G, \tau_{pc}) \subseteq \Gamma(\Gamma G, \tau_{co})$. El contenido contrario es inmediato y obtenemos que $(\Gamma G, \tau_{co})^\wedge = (\Gamma G, \tau_{pc})^\wedge$ algebraica y topológicamente, ya que los compactos de $(\Gamma G, \tau_{co})$ y $(\Gamma G, \tau_{pc})$ son los mismos. $\square$

Las nociones de espacio casi metrizable y de espacio Čech completo admiten expresiones muy convenientes cuando el conjunto soporte es un grupo topológico ([75]). Un grupo topológico de Hausdorff G es *casi metrizable* si y sólo si existe un subgrupo compacto $H \subset G$ tal que G/H es metrizable. Y G es *Čech completo* si y sólo si existe un subgrupo compacto $H \subset G$ tal que G/H es metrizable y completo.

Un grupo Čech completo es en particular un k-espacio cuyo dual es también k-espacio, por tanto α_G y $\alpha_{G^\wedge}$ son continuas.

Sin embargo, ser Čech completo no es condición necesaria para la continuidad simultánea de α_G y $\alpha_{G^\wedge}$. Por ejemplo un grupo metrizable o casi metrizable, no completo, G, no es Čech completo y tanto α_G como $\alpha_{G^\wedge}$ son continuas.

En [30] encontramos el siguiente "principio de equicontinuidad para grupos" que relaciona los equicontinuos con los débilmente compactos en el dual de un grupo topológico.

Proposición 3.1.12 *([30] Corollary 1.6)*
Si X es un grupo topológico que verifica una de las siguientes condiciones:

1. *metrizable y hereditariamente Baire,*
2. *Baire y separable,*
3. *Čech completo,*

entonces todo compacto $B \subset \Gamma_\omega X$ es equicontinuo y en consecuencia es también compacto en $X^\wedge$.

Observemos que en los casos 1. y 3. α_X es continua y ya sabíamos (Teorema 3.1.9) que los equicontinuos de ΓX coinciden con los relativamente compactos de $X^\wedge$. La Proposición 3.1.12 nos dice además que en los casos 1., 2. y 3. coinciden en ΓX los relativamente débilmente compactos con los equicontinuos.

Diremos que un grupo G *respeta compacidad* si tiene los mismos compactos que $G^+ = (G, \omega(G, \Gamma G))$. El Teorema de Glicksberg afirma que los grupos localmente compactos respetan compacidad. Análogamente, $G^\wedge$ *respeta compacidad* si tiene los mismos compactos que $(\Gamma G, \omega(\Gamma G, \Gamma G^\wedge))$. De la Proposición 3.1.12 se deduce que si G verifica 1., 2. o 3., el dual $G^\wedge$ respeta compacidad.

3.2 Propiedades del dual de convergencia $\Gamma_c G$

Algunas de las propiedades estudiadas en este apartado (3.2.2, 3.2.5) tienen su origen en [29]. Allí se demuestra que el dual de convergencia de un grupo topológico abeliano G es localmente compacto. Después se procede a estudiar el bidual, $\Gamma_c\Gamma_c G$, y se llega a que es topológico y tiene la topología compacto-abierta respecto de los compactos del dual $\Gamma_c G$.

Hemos clarificado esta situación, viendo que no sólo los biduales de convergencia de grupos topológicos son topológicos, sino que el dual de un grupo de convergencia localmente compacto cualquiera es topológico y su topología es la compacto-abierta respecto de los compactos de convergencia (3.2.5).

Proposición 3.2.1 *Sea D un grupo discreto, entonces $\Gamma_c D$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $\Gamma_c D$, entonces $\mathcal{U} \stackrel{\tau_{co}}{\to} \varphi$ porque $D^\wedge$ es compacto. Veamos que $\mathcal{U} \stackrel{\Lambda_c}{\to} \varphi$. Si $\mathcal{F} \to x$ en D, $\mathcal{F} \supset [x]$ y $e(\mathcal{U} \times \mathcal{F}) \supset e(\mathcal{U} \times [x])$. Basta ver que $e(\mathcal{U} \times [x]) \to \varphi(x)$. Si $V \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(\varphi(x))$, $(\{x\}, V)$ es entorno de φ en τ_{co} y entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subset (\{x\}, V)$. Luego $e(U \times \{x\}) \subset V$. □

Proposición 3.2.2 *Sea G un grupo topológico de Hausdorff, entonces $\Gamma_c G$ es grupo de convergencia localmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{F}$ un filtro en $\Gamma_c G$ convergente a 0, entonces $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1) \subset e(\mathcal{F} \times \mathcal{B}_G(x))$ para todo $x \in G$. En particular, si tomamos $W := \{z \in \mathbb{T} : Re(z) \geq 0\}$, existen $F \in \mathcal{F}$ y $U \in \mathcal{B}_G(0)$ tales que $e(F \times U) \subset W$. Por tanto $F \subset U^o$ y entonces $\mathcal{F} \ni U^o$ que es Λ_c-compacto (§ 3.1). □

Corolario 3.2.3 *Sea G un grupo topológico de Hausdorff, entonces $\Gamma_c G$ es k-espacio de convergencia y $(\Gamma G, \tau_{\Lambda_c})$ es k-espacio topológico.*

DEMOSTRACIÓN: Por la Proposición 1.5.4, $\Gamma_c G$ es k-espacio de convergencia por ser localmente compacto y $(\Gamma G, \tau_{\Lambda_c})$ es k-espacio topológico por la Proposición 1.5.2. □

Proposición 3.2.4 *Para un grupo de convergencia G, podemos considerar en ΓG la topología compacto-abierta referida a los compactos de convergencia de G, τ_{ko}. Sea (φ_α) una red en ΓG tal que $\varphi_\alpha \stackrel{\Lambda_c}{\to} 0$, entonces $\varphi_\alpha \stackrel{\tau_{ko}}{\to} 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(K, V) \in \mathcal{B}_{\tau_{ko}}(0)$. Si no existiera α_0 tal que $\forall \alpha \geq \alpha_0$, $\varphi_\alpha \in (K, V)$, tendríamos que $\forall \alpha$, $\exists \alpha' \geq \alpha$ y $x_{\alpha'} \in K$ tal que $\varphi_{\alpha'}(x_{\alpha'}) \notin V$. Así $(x_{\alpha'})$ es una red en el compacto K, luego posee una subred convergente, $(x_{\alpha''})$, pero

$\varphi_{\alpha''}(x_{\alpha''}) \not\to 0$ porque todos los términos están fuera de V. Esto contradice que (φ_α) sea Λ_c-convergente. □

Proposición 3.2.5 *Sea G un grupo de convergencia localmente compacto, entonces $\Gamma_c G$ es topológico. Y además su topología coincide con la topología compacto-abierta respecto a los compactos de convergencia de G.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{F}$ un filtro en ΓG. Por la Proposición 3.2.4, si $\mathcal{F}$ es Λ_c-convergente, es también τ_{ko}-convergente. Veamos que si es τ_{ko}-convergente a 0 es también Λ_c-convergente a 0. Sea $\mathcal{H}$ un filtro convergente en G. Por ser G localmente compacto, existe $H \in \mathcal{H}$ compacto. Sea $V \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1)$, tomamos el entorno de cero (H, V) y por ser $\mathcal{F}$ τ_{ko}-convergente a 0, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq (H, V)$ con lo que $e(F \times H) \subset V$. □

La Proposición 3.2.5 unida a los comentarios que hacíamos al principio de este apartado, permite expresar la siguiente simetría destacable en la categoría de convergencia de grupos abelianos CONABGR: "El dual de convergencia de un grupo topológico es localmente compacto de convergencia y el dual de un grupo localmente compacto de convergencia es un grupo topológico".

Observación 7 *En particular, si G es un grupo topológico localmente compacto, no hay distinción entre la estructura de convergencia continua y la topología compacto-abierta en ΓG.*

Corolario 3.2.6 *Si $\Gamma_c G$ es grupo de convergencia localmente compacto, entonces $\Gamma_c\Gamma_c G$ es topológico.*
En particular esto se da si G es un grupo topológico de Hausdorff.

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar la Proposición 3.2.5 a $\Gamma_c G$. □

También se verifica lo siguiente:

Proposición 3.2.7 *([29] Theorem 1)*
Si la inclusión canónica, α_G, de un grupo topológico G en su bidual $G^{\wedge\wedge}$ es continua, entonces $G^{\wedge\wedge}$ es subgrupo topológico de $\Gamma_c\Gamma_c G$.

Proposición 3.2.8 *Sea G un grupo de convergencia compacto, entonces $\Gamma_c G$ es discreto.*

DEMOSTRACIÓN: Por ser G localmente compacto, $\Gamma_c G$ es topológico y su topología es la compacto-abierta. Sea el entorno de 1 en $\mathbb{T}$, $V = B_1$, entonces $\{0\} = (G, V)$ y por ser G compacto, $(G, V) \in \mathcal{B}_{\Gamma_c G}(0)$. □

Un grupo topológico compacto G es reflexivo en sentido Pontryagin y, por tanto, α_G es un isomorfismo topológico. Para grupos de convergencia tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.2.9 *Sea G un grupo de convergencia compacto, entonces κ_G es sobre.*

DEMOSTRACIÓN: Por la Proposición 3.2.8, $\Gamma_c G$ es discreto, y por 3.2.1, $\Gamma_c \Gamma_c G$ es compacto.
Además, como $\Gamma_c G$ es, en particular, localmente compacto, su dual es topológico y tiene la topología compacto-abierta, por tanto $\Gamma_c \Gamma_c G = (\Gamma_c G)^\wedge$.
Basta ver que $\kappa_G(G)$ es denso en $\Gamma_c \Gamma_c G$ y siendo la imagen continua de un compacto en un espacio de Hausdorff, habrá de coincidir con $\Gamma_c \Gamma_c G$. Teniendo en cuenta que todo subgrupo del dual de un grupo discreto, que separa puntos del grupo, es denso ([66] Proposition 32), el subgrupo $\kappa_G(G)$ de $\Gamma_c \Gamma_c G$ es denso. □

Observemos que si G es un grupo de convergencia compacto que no es topológico, κ_G no puede ser isomorfismo de G en $\Gamma_c \Gamma_c G$ ya que éste último es topológico (Corolario 3.2.6). Son raros sin embargo, los grupos compactos de convergencia que no son topológicos, ya que para serlo basta que satisfagan el axioma de Urysohn (Proposición 1.4.4).

3.3 Propiedades de los subgrupos compactos y de los subgrupos abiertos

Proposición 3.3.1 *Sea K un subgrupo compacto de un grupo topológico G, entonces K^o es abierto en $\Gamma_c G$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(\xi_\alpha) \subset \Gamma_c G$ tal que $\xi_\alpha \xrightarrow{\Lambda_c} 0$, entonces $\xi_\alpha \xrightarrow{\tau_{co}} 0$. Como K^o es τ_{co}-abierto, la red está eventualmente en K^o y por tanto es Λ_c-abierto. □

Proposición 3.3.2 *Sea K un subgrupo compacto de un grupo de convergencia G, entonces K^o es abierto en $\Gamma_c G$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(\xi_\alpha) \subset \Gamma_c G$ tal que $\xi_\alpha \xrightarrow{\Lambda_c} \xi \in K^o$. Por 3.2.4, $\xi_\alpha \xrightarrow{\tau_{ko}} \xi$. Para $V = B_1$, $(K, V) \in \mathcal{B}_{\tau_{ko}}(\xi)$ y existe α_0 tal que si $\alpha \geq \alpha_0$, $\xi_\alpha \in (K, V)$. Pero, por ser K subgrupo, $\xi_\alpha(K) \subset \{1\}$ y obtenemos que $\xi_\alpha \in K^o$, $\forall \alpha \geq \alpha_0$. □

Proposición 3.3.3 *Si K es un subgrupo compacto de un grupo de convergencia G con suficientes caracteres continuos, entonces K es dualmente sumergido.*

DEMOSTRACIÓN: Por tener G suficientes caracteres continuos, el subgrupo de ΓK definido por $L := \{\varphi \in \Gamma K \mid \varphi$ se extiende a $G\}$, separa puntos de K. Además, $\Gamma_c K$ es discreto (Proposición 3.2.8) y cada uno de sus cocientes de Hausdorff, no triviales, tiene un carácter no trivial. Veamos que L es denso en $\Gamma_c K$ y entonces $L = \Gamma_c K$.
Supongamos que no lo sea, entonces $\overline{L}$ es un cerrado de $\Gamma_c K$ estrictamente contenido en él. Sea $p\colon \Gamma_c K \to \Gamma_c K/\overline{L}$ la proyección canónica. Existe un carácter no trivial $\phi \in \Gamma_c K/\overline{L}$ y, por tanto, tenemos $\phi p \in \overline{L}^o \subset \Gamma_c \Gamma_c K$ tal que $\phi p \neq 0$.
Pero, por ser κ_K sobre (Proposición 3.2.9), existe $k \in K$ tal que $\kappa_K(k) = \phi p$. Entonces, para todo $\gamma \in L$, $\gamma(k) = \kappa_K(k)(\gamma) = \phi p(\gamma) = 1$ y, como L separa puntos, $k = 0$. Luego $\phi p = 0$, nos da la contradicción. □

Proposición 3.3.4 *Si K es un subgrupo compacto de un grupo de convergencia G con suficientes caracteres continuos, entonces $\kappa_G(K) = K^{oo}$. En consecuencia, K es dualmente cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Siempre se da $\kappa_G(K) \subset K^{oo}$, veamos el otro contenido.
Consideremos primero la inclusión $i\colon K \to G$. Su dual $\Gamma i\colon \Gamma_c G \to \Gamma_c K$, que es la restricción a K de los caracteres continuos de G, es sobre porque K es dualmente sumergido por la Proposición 3.3.3. Y el núcleo de Γi es K^o. Esto induce un isomorfismo continuo $\Psi_K\colon \Gamma_c G/K^o \to \Gamma_c K$, que además tiene inversa continua porque los dos grupos son discretos. Su dual, $\Gamma\Psi_K$, es un isomorfismo bicontinuo.
Consideremos ahora la proyección canónica $p\colon \Gamma_c G \to \Gamma_c G/K^o$, entonces $\Gamma p\colon \Gamma_c(\Gamma_c G/K^o) \to \Gamma_c \Gamma_c G$ es inyectiva y su imagen es K^{oo}, luego $\Phi^{K^o}\colon \Gamma_c(\Gamma_c G/K^o) \to K^{oo}$ es un isomorfismo.

Así, la composición $\Phi^{K^o} \circ \Gamma\Psi_K \circ \kappa_K$ es un isomorfismo de K en K^{oo}.

Sea $h \in K^{oo}$, y sea $h' \in K$ tal que $h = \Phi^{K^o}\,\Gamma\Psi_K\,\kappa_K(h')$. Entonces $h = \kappa_G(h') \in \kappa_G(K)$. En efecto, si $\chi \in \Gamma_c G$ tenemos $\kappa_G(h')(\chi) = \chi(h')$ y $(\Phi^{K^o}\,\Gamma\Psi_K\,\kappa_K(h'))(\chi) = \Gamma\Psi_K\,\kappa_K(h')p(\chi) = \kappa_K(h')(\Psi_K\,p\chi) = \kappa_K(h')(\chi_{|K}) = \chi_{|K}(h')$.
La última afirmación se obtiene teniendo en cuenta el Lema 3.0.2. □

Observación 8 La hipótesis que G tenga suficientes caracteres continuos es esencial en la Proposición 3.3.4, como se ve en el siguiente ejemplo:
Sea E un espacio de Banach, separable, infinito dimensional. Existe un subgrupo libre discreto K de E tal que $(E/K)^\wedge = \{0\}$ [7]. Sea a un generador de K; la envoltura lineal de a es un subgrupo cerrado de E, sea $N := \mathbb{R}a$. Si $p\colon E \to E/K$ es la proyección canónica, entonces $p(N)$ se puede identificar con $p([0,a])$, que es compacto e isomorfo a S^1 ya que $p(0) = p(a)$, y no es dualmente cerrado, ya que $(E/K)^\wedge = \{0\}$.

Proposición 3.3.5 *Si A es un subgrupo abierto de un grupo de convergencia G, todo carácter $\varphi \in \Gamma A$ se extiende a un carácter continuo de G.*

Demostración: Consideramos $x \notin A$ y vamos a extender φ al grupo $gp(A \cup \{x\})$. Veamos primero cual es la extensión algebraica, considerando los dos casos estándar:

a) $nx \notin A$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Entonces la extensión se define $\tilde{\varphi}(x) = 1$ y $\tilde{\varphi}(a) = \varphi(a)$ para todo $a \in A$.

b) $mx \in A$ y sea m el mínimo número natural con esa condición. Definimos $\tilde{\varphi}(x) = (\varphi(mx))^{\frac{1}{m}}$ (la raiz m-ésima principal) y $\tilde{\varphi}(a) = \varphi(a)$ para todo $a \in A$.

Y por extensión queda definido $\tilde{\varphi}$ en $gp(A \cup \{x\})$.
La extensión $\tilde{\varphi}$ es continua por tener restricción continua en un subgrupo abierto (Proposición 1.6.4).

Así pues hemos logrado extender φ a un carácter continuo, $\tilde{\varphi}$, definido en el subgrupo $A_x := gp(A \cup \{x\})$.
Veamos que también A_x es abierto en G. En efecto, si (z_β) es una red en G con $z_\beta \to z \in gp(A \cup \{x\})$, z es de la forma $mx + a$ para cierto $m \in \mathbb{Z}$ y $a \in A$, entonces $z_\beta - mx \to a \in A$. Como A es abierto, $\exists \beta_0$ tal que $\forall \beta \geq \beta_0$, $z_\beta - mx \in A$. Y esto implica que $\forall \beta \geq \beta_0$, $z_\beta = mx + a_\beta$, con $a_\beta \in A$, luego $z_\beta \in gp(A \cup \{x\})$, $\forall \beta \geq \beta_0$.

Ahora podemos proceder iterativamente tomando A_x y $\tilde{\varphi}$ en lugar de A y φ. Y se llega así a obtener una extensión de φ definida en G. En efecto, basta aplicar el lema de Zorn al conjunto de pares (B, ψ) donde B es un subgrupo abierto de G que contiene a A y ψ un carácter definido en B cuya restricción a A es φ, ordenado por $(B, \psi) \leq (C, \xi) \iff B \subseteq C$ y $\xi_{|B} = \psi$. □

Proposición 3.3.6 *Si A es un subgrupo abierto de un grupo de convergencia G, entonces A es dualmente cerrado y dualmente sumergido.*

Demostración:

1. El cociente G/A es discreto (Proposición 1.6.3), por tanto es reflexivo y tiene suficientes caracteres continuos. Luego A es dualmente cerrado.

2. Por la Proposición 3.3.5, cada carácter $\varphi \in \Gamma A$ se extiende a un caraćter continuo de G.

□

Veamos ahora que toda red convergente de caracteres continuos definidos en un subgrupo abierto de un grupo topológico se puede extender a una red convergente de caracteres continuos definidos en todo el grupo.

Teorema 3.3.7 *Sea A un subgrupo abierto de un grupo topológico abeliano de Hausdorff G. Sea $(\xi_\alpha)_{\alpha \in D}$ una red convergente a ξ en $A^\wedge$, entonces existen $\tilde{\xi_\alpha}$ y $\tilde{\xi}$ en $G^\wedge$, extensiones de ξ_α y ξ respectivamente, tales que $\tilde{\xi_\alpha} \to \tilde{\xi}$.*

Demostración: Sea $x \notin A$, como en la Proposición 3.3.5, podemos encontrar extensiones $\xi_\alpha^{(1)}$, $\xi^{(1)}$ de ξ_α, ξ definidas en $A_1 := gp(A \cup \{x\})$.
Veamos que $\xi_\alpha^{(1)} \to \xi^{(1)}$.
Sea (S, V) un entorno de cero en $A_1^\wedge$, donde $S \subset A_1$ es compacto y V es entorno de 1 en $\mathbb{T}$. Tenemos que encontrar α_0 tal que $\xi_\alpha^{(1)} - \xi^{(1)} \in (S, V)$ para cada $\alpha \geq \alpha_0$.
Sea α_1 tal que $\xi_\alpha - \xi \in (S \cap A, V)$, $\forall \alpha \geq \alpha_1$. Esto es posible ya que $S \cap A$ es compacto.
Distinguimos ahora los dos casos estándar, como en 3.3.5:

a) Si $nx \notin A$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, cogemos $\alpha_0 = \alpha_1$.

b) Si $mx \in A$, con m el mínimo número natural con esa condición, consideramos las siguientes posibilidades:

i) $S \subset A$; entonces $\xi_\alpha^{(1)}(s) = \xi_\alpha(s)$ y $\xi^{(1)}(s) = \xi(s)$, $\forall s \in S$, y nos sirve α_1.

ii) $S \setminus A$ tiene un solo elemento, sea $y = lx + a$, donde l es un entero y $a \in A$. Sea $W \in E_T(0)$ tal que $W + W \subset V$. Ya que $\xi_\alpha^{(1)}(lx) = \dfrac{l}{m}\xi_\alpha(mx)$, converge a $\xi^{(1)}(lx) = \dfrac{l}{m}\xi(mx)$, entonces podemos determinar α_0 en D tal que $(\xi_\alpha^{(1)} - \xi_\alpha^{(1)})(s) \in W + W \subset V$, para cada $s \in S$.
Si $S \setminus A$ es finito nos sirve un argumento similar.

iii) $H := S \setminus A$ es infinito. Por ser $H \subset S$ compacto, el recubrimiento abierto $\{y + A, y \in H\}$ tiene un subrecubrimiento finito, sea $\bigcup_{i=1}^{n}(y_i + A) \supset H$, con $y_i \in H$. Designaremos como $S'_i := (y_i + A) \cap H$, $S_i := S'_i - y_i$ y $F := \bigcup_{i=1}^{n} S_i \subset A$. F es compacto y también $H \subset \bigcup_{i=1}^{n}(y_i + F)$. Para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ determinamos α_i como en ii), tal que $(\xi_\alpha^{(1)} - \xi^{(1)})(y_i) \in W$, para cada $\alpha \geq \alpha_i$. Ahora si $\alpha_0 \geq \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tenemos: cada z en H pertenece a algún $y_i + F$, sea $z = y_i + f$. Así $(\xi_\alpha^{(1)} - \xi^{(1)})(y_i + f) \in W + W \subset V$, para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Esto demuestra que $\xi_\alpha^{(1)} \to \xi^{(1)}$ en $A_1 = gp(A \cup \{x\})$. Repitiendo este proceso obtenemos subgrupos abiertos A_j y extensiones $\xi_\alpha^{(j)}$, $\xi^{(j)}$ definidas en dichos grupos. Entonces $\tilde{\xi_\alpha} := \bigcup \xi_\alpha^{(j)}$, $\tilde{\xi} := \bigcup \xi^{(j)}$ son las extensiones definidas en G. Veamos que $\tilde{\xi_\alpha} \to \tilde{\xi}$. Sea (S, V), $S \subset G$ compacto. La familia $\{x + A, x \in S\}$ es un recubrimiento abierto de S. Sea $x_1, \ldots, x_n \in S$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n}(x_i + A) \supset S$. Cada x_i pertenece a un subgrupo A_{ι_i}; denotamos por A_j al mayor de los $A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n}$ y basta determinar α_j tal que $\xi_\alpha^{(j)} - \xi^{(j)} \in (S, V)$, para todo $\alpha > \alpha_j$. □

Utilizando este Teorema, podemos dar una nueva demostración de [10] Lemma 2.2 (d).

Proposición 3.3.8 *Sea A un subgrupo abierto de un grupo topológico G, entonces $i^\wedge: G^\wedge \to A^\wedge$ es abierta.*

DEMOSTRACIÓN: Sea O un abierto en $G^\wedge$, veamos que $i^\wedge(O)$ es abierto en $A^\wedge$. Sea $\xi \in i^\wedge(O)$ y $(\xi_\alpha) \subset A^\wedge$ una red τ_{co}-convergente a ξ. Por el Teorema 3.3.7, existen $\tilde{\xi_\alpha}$, $\tilde{\xi}$ extensiones en $G^\wedge$ tales que $\tilde{\xi_\alpha} \xrightarrow{\tau_{co}} \tilde{\xi}$. Observemos que $\tilde{\xi} \in O + A^o$ que es abierto, por tanto existe α_0 tal que $\tilde{\xi_\alpha} \in O + A^o$, $\forall \alpha \geq \alpha_0$. Luego $\xi_\alpha = i^\wedge(\tilde{\xi_\alpha}) \in i^\wedge(O + A^o) = i^\wedge(O)$, $\forall \alpha \geq \alpha_0$. □

Proposición 3.3.9 *Si A es un subgrupo abierto de un grupo de convergencia G, toda red en $\Gamma_c A$ convergente se eleva a una red convergente en $\Gamma_c G$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(\xi_\alpha) \subset \Gamma_c A$ una red tal que $\xi_\alpha \xrightarrow{\Lambda_c} \xi$ en $\Gamma_c A$.
Consideramos $x \notin A$ y extendemos (ξ_α) y ξ a caracteres continuos del grupo $gp(A \cup \{x\})$. Sean $\tilde{\xi_\alpha}$ y $\tilde{\xi}$ las extensiones continuas.
Para probar que $\tilde{\xi_\alpha} \xrightarrow{\Lambda_c} \tilde{\xi}$, tomamos una red (z_β) en $gp(A \cup \{x\})$, tal que $z_\beta \to z$.
Consideramos $z_\beta - z \to 0 \in A$. Por ser A abierto, existe β_0 tal que $\forall \beta \geq \beta_0$, $z_\beta - z \in A$. Entonces, $\forall \beta \geq \beta_0$, $\tilde{\xi_\alpha}(z_\beta - z) = \xi_\alpha(z_\beta - z) \to 1$. Luego $\tilde{\xi_\alpha}(z_\beta) \to \tilde{\xi}(z)$.

Procediendo iterativamente obtenemos extensiones, $\tilde{\xi_\alpha}$ y $\tilde{\xi}$, de ξ_α y ξ respectivamente, definidas en G y tales que $\tilde{\xi_\alpha} \xrightarrow{\Lambda_c} \tilde{\xi}$.

□

Ahora es fácil comprobar lo siguiente:

Corolario 3.3.10 *Sea A subgrupo abierto de un grupo de convergencia de Hausdorff G. El homomorfismo canónico $\Psi_A \colon \Gamma_c G / A^o \to \Gamma_c A$ es un isomorfismo bicontinuo.*

Capítulo 4

Grupos topológicos localmente casi-convexos

La clase de los espacios vectoriales topológicos localmente convexos juega un papel de gran importancia en la teoría de los espacios vectoriales topológicos. Por otra parte, los espacios vectoriales topológicos, olvidando la linealidad, son grupos topológicos abelianos. Por tanto es muy deseable determinar una subfamilia de grupos topológicos, que incluya precisamente a los espacios localmente convexos, y que de alguna manera sea la generalización de éstos en la clase de los grupos topológicos abelianos. Una obstrucción a este proyecto es que en el marco de los grupos no se puede hablar de conjuntos convexos, ya que no tiene sentido la linealidad.

En 1951 Vilenkin introdujo la noción de *subconjunto casi-convexo* ([85]), inspirándose quizás en el Teorema de Hahn-Banach. Este fue el punto de partida para definir los *grupos localmente casi-convexos*, que en cierto modo se asemejan a los espacios vectoriales localmente convexos, aunque presentan también diferencias notables con éstos, debidas a que un conjunto casi-convexo puede no ser convexo y viceversa. Por ejemplo, el conjunto formado por $\{-1, 0, 1\}$ es casi-convexo en $\mathbb{R}$ y sin embargo hay intervalos en $\mathbb{R}$ que no son casi-convexos (cfr. § 4.2). En los espacios vectoriales topológicos la envoltura casi-convexa de un conjunto equilibrado coincide con la envoltura convexa y cerrada de dicho conjunto.

En este Capítulo hacemos un estudio de los grupos localmente casi-convexos. Banaszczyk en [8] ha dado algunas propiedades fundamentales de dichos grupos, pero su estudio se dirige más bien a tener las herramientas para la teoría de grupos nucleares, una subclase importante de grupos localmente casi-convexos. Es decir, la memoria citada no constituye un estudio sistemático de los grupos localmente casi-convexos. También en [5] encontramos algunas proposiciones al respecto.

Comenzamos este apartado dando propiedades y ejemplos básicos de conjuntos casi-convexos que no figuran en la literatura. Resulta casi imprescindible disponer de ellos para no tener intuiciones falsas, provinientes de los conjuntos convexos. Probamos, además, al final de este Capítulo, que para todo grupo topológico de Hausdorff (G, τ), existe una topología de grupo τ_e que es la más fina de las topologías de grupo localmente casi-convexas menos finas que τ. El grupo (G, τ_e) tiene el mismo dual que (G, τ), y utilizando τ_e demostramos que la casi-convexidad local es, en algún caso concreto, una propiedad de tres espacios. Este resultado ya ha sido objeto de una publicación [21], que ha sido citada en [30] donde se estudia de modo exhaustivo la dualidad en grupos, en analogía con la dualidad en espacios vectoriales topológicos, llegando a definir una generalización de la topología de Mackey para grupos.

4.1 Propiedades de los conjuntos polares y de las envolturas casi-convexas

Sea G un grupo topológico abeliano de Hausdorff.

Un subconjunto S de G diremos que es *casi-convexo* si $\forall g \in G \setminus S, \exists \chi \in S^o$ tal que $Re(\chi(g)) < 0$. La *envoltura casi-convexa* de $S \subseteq G$ se define como

$$Q(S) := \{g \in G : \ Re(\chi(g)) \geq 0, \ \forall \chi \in S^o\}.$$

Se comprueba fácilmente que $S = Q(S)$ si y sólo si S es casi-convexo. Estas definiciones dependen del conjunto de caracteres continuos, ΓG, y no de la estructura que consideremos en él.

Observemos que para subgrupos, ser casi-convexo es lo mismo que ser dualmente cerrado.

En lo que sigue denotemos por $B_1 := \left\{e^{2\pi i x} : x \in \left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right]\right\} \subset \mathbb{T}$ y por $\varphi_0 \in G^\wedge$ al carácter tal que $\varphi_0(g) = 1$, $\forall g \in G$.

Observaciones 9 *Sea G un grupo topológico y A un subconjunto de G.*

- *El conjunto $Q(A) = \bigcap_{\chi \in A^o} \chi^{-1}(B_1)$ es $\omega(G, \Gamma G)$-cerrado.*

- *Si A y B son subconjuntos de G tal que $A \subseteq B$, entonces $B^o \subseteq A^o$ y $A \subseteq Q(A) \subseteq Q(B)$.*
- *También, para subconjuntos de ΓG, si $X \subseteq Y$ se verifica ${}^oY \subseteq {}^oX$.*
- $Q(A) = {}^o(A^o)$
- $(Q(A))^o = A^o$
- *Si en G consideramos dos topologías tal que $\tau \leq \tau'$, entonces $Q_{\tau'}(A) \subseteq Q_\tau(A)$.*

Lema 4.1.1 *Sea S un subconjunto no vacio de un grupo topológico G, entonces S^o es casi-convexo en $(\Gamma G, \tau)$ con $\tau \geq \tau_{co}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\beta \in \Gamma G \setminus S^o$ y sea $s \in S$ tal que $Re(\beta(s)) < 0$. Tenemos $\alpha_G(s) \in \Gamma G^\wedge$, $Re((\alpha_G(s))(\beta)) < 0$ y $Re((\alpha_G(s))(\chi)) \geq 0$, para todo χ en S^o. $\square$

Para $A \subset G$ y $t \in \mathbb{N}$ denotaremos por:

$$A + \overset{t)}{\cdots} + A := \{x_1 + \ldots + x_t \in G \mid x_i \in A,\ \forall i\}$$

$$tA := \{tx \mid x \in A\}$$

$$\frac{1}{t}A := \{x \in G \mid tx \in A\}.$$

Observemos que $tA \subseteq A + \overset{t)}{\cdots} + A$.

Proposición 4.1.2 *Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una colección de subconjuntos de G. Entonces se verifica:*

i) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^o \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i^o \subseteq \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^o$,

ii) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^o = \bigcap_{i \in I} A_i^o$,

iii) $(tA)^o = \frac{1}{t}A^o$. *En particular:* $\left(A + \overset{t)}{\cdots} + A\right)^o \subseteq \frac{1}{t}A^o$.

DEMOSTRACIÓN:

i) $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, $\forall j \in J \Rightarrow \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^o \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i^o \subseteq \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^o$.

ii) $\subseteq$) $A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ para todo $i \in I \Rightarrow \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^o \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i^o$.

$\supseteq$) Sea $\varphi \in \bigcap_{i\in I} A_i^o$, entonces, para todo $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, $Re(\varphi(x)) \geq 0$.

iii) Sea $x \in A$. Entonces $\varphi \in (tA)^o \Leftrightarrow 0 \leq Re(\varphi(x + \overset{t)}{\cdots} + x)) = Re(\varphi(x) \cdot \overset{t)}{\cdots} \cdot \varphi(x)) = Re((\varphi + \overset{t)}{\cdots} + \varphi)(x)) \Leftrightarrow \varphi + \overset{t)}{\cdots} + \varphi \in A^o \Leftrightarrow \varphi \in \frac{1}{t}A^o$.
Además, ya que $tA \subseteq A + \overset{t)}{\cdots} + A$, tenemos que $(A + \overset{t)}{\cdots} + A)^o \subseteq (tA)^o = \frac{1}{t}A^o$ □

Proposición 4.1.3 *Sean A y B subconjuntos de G. Entonces:*

i) $Q(A \cap B) \subseteq Q(A) \cap Q(B)$

ii) $Q(A) \cup Q(B) \subseteq Q(A \cup B)$.

iii) Si $0 \in A$, $Q(A) + Q(A) \subseteq Q(A + A)$.

iv) $Q(A)$ *es simétrico.*

DEMOSTRACIÓN:

i) Observemos que $x \in Q(A) \cap Q(B)$ si y sólo si $\forall \varphi \in A^o \cup B^o$, $Re(\varphi(x)) \geq 0$. Por la Proposición 4.1.2 $A^o \cup B^o \subseteq (A \cap B)^o$. Entonces, si $x \in Q(A \cap B)$ y $\varphi \in A^o \cup B^o$, $\varphi \in (A \cap B)^o$ y $Re(\varphi(x)) \geq 0$.

ii) $x \in Q(A)$ si y sólo si $\forall \varphi \in A^o$, $Re(\varphi(x)) \geq 0$. Así, para todo $\varphi \in (A \cup B)^o \subseteq A^o$ también se verifica $Re(\varphi(x)) \geq 0$ y $x \in Q(A \cup B)$. Análogamente si $x \in Q(B)$.

iii) Sean $x_1,\ x_2 \ \in Q(A)$ y $\varphi \in (A + A)^o$. Ya que $(A + A)^o \subseteq \frac{1}{2}A^o$ (Proposición 4.1.2 (iii)), tenemos $\varphi + \varphi \in A^o$. Entonces, para $i = 1, 2$ se verifica $0 \leq Re((\varphi + \varphi)(x_i)) = Re(\varphi(x_i) \cdot \varphi(x_i))$ con lo que se da una de las siguientes desigualdades: $Re(\varphi(x_i)) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ o $Re(\varphi(x_i)) \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Pero la segunda desigualdad no es posible porque $0 \in A \Rightarrow A \subseteq A + A \Rightarrow Q(A) \subseteq Q(A + A) \Rightarrow Re(\varphi(x_i)) \geq 0$ para $i = 1, 2$. Así $Re(\varphi(x_1 + x_2)) = Re(\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2)) \geq 0$.

iv) Sea $\varphi \in A^o$ y $x \in Q(A)$. Entonces $Re(\varphi(-x)) = Re(\varphi(x)^{-1}) = Re(\varphi(x)) \geq 0$ □

En general no se dan las igualdades en i), ii) y iii) (cfr. § 4.2). Y observemos que la intersección de conjuntos casi-convexos es casi-convexa, en efecto, si $Q(A) = A$ y $Q(B) = B$, entonces $A \cap B \subseteq Q(A \cap B) \subseteq Q(A) \cap Q(B) \subseteq A \cap B$ y por tanto $Q(A \cap B) = A \cap B$.

Sean G_1 y G_2 dos grupos topológicos, sabemos que $G_1^\wedge \times G_2^\wedge \cong (G_1 \times G_2)^\wedge$ y el isomorfismo viene dado por $(\chi_1, \chi_2) \leftrightarrow \chi$ tal que $\chi(g_1, g_2) = \chi_1(g_1) \cdot \chi_2(g_2) \in \mathbb{T}$, $\forall (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$. En este contexto tenemos:

Proposición 4.1.4 *Sean A_1 y A_2 subconjuntos de los grupos topológicos G_1 y G_2 respectivamente y denotemos por φ_0 al neutro del dual, entonces:*

a) Se verifica que $(A_1^o \times \{\varphi_0\}) \cup (\{\varphi_0\} \times A_2^o) \subset (A_1 \times A_2)^o$.
Si además $(0,0) \in A_1 \times A_2$, $(A_1 \times A_2)^o \subseteq A_1^o \times A_2^o$.

b) $Q(A_1 \times A_2) \subseteq Q(A_1) \times Q(A_2)$

En general no se dan las igualdades (cfr. § 4.2).

DEMOSTRACIÓN:

a) $A_1^o \times \{\varphi_0\} \subset (A_1 \times A_2)^o$ ya que si $(\chi, \varphi_0) \in A_1^o \times \{\varphi_0\}$, $\forall (g_1, g_2) \in A_1 \times A_2$, $Re((\chi, \varphi_0)(g_1, g_2)) = Re(\chi(g_1)) \geq 0$ y por tanto $(\chi, \varphi_0) \in (A_1 \times A_2)^o$.

Igualmente $\{\varphi_0\} \times A_2^o \subset (A_1 \times A_2)^o$.

Para la segunda inclusión basta observar que si $(\chi_1, \chi_2) \in (A_1 \times A_2)^o$, $Re(\chi_1(g_1) \cdot \chi_2(g_2)) \geq 0$, $\forall (g_1, g_2) \in A_1 \times A_2$ y, como $(0,0) \in A_1 \times A_2$, debe cumplirse $Re(\chi_1(g_1)) \geq 0$ y $Re(\chi_2(g_2)) \geq 0$, $\forall (g_1, g_2) \in A_1 \times A_2$. Luego $\chi_1 \in A_1^o$ y $\chi_2 \in A_2^o$.

b) Sea $(g_1, g_2) \in Q(A_1 \times A_2)$, veamos que $g_1 \in Q(A_1)$. Si $\chi \in A_1^o$, $(\chi, \varphi_0) \in A_1^o \times \{\varphi_0\} \subseteq (A_1 \times A_2)^o$ y, entonces $Re(\chi(g_1)) = Re((\chi, \varphi_0)(g_1, g_2)) \geq 0$. Igualmente $g_2 \in Q(A_2)$. □

Observemos que el producto de conjuntos casi-convexos es casi-convexo ya que, si A_1 y A_2 son casi-convexos, $A_1 \times A_2 \subseteq Q(A_1 \times A_2) \subseteq Q(A_1) \times Q(A_2) = A_1 \times A_2$.

Lema 4.1.5 *Sea $H \subset G$ un subgrupo cerrado, sea $p: G \to G/H$ la proyección canónica y sea $p^\wedge: (G/H)^\wedge \to G^\wedge$ el homomorfismo dual de p. Si W es un subconjunto de G/H, entonces* *a)* $(p^{-1}(W))^o \supseteq p^\wedge(W^o)$, *y la igualdad se verifica si* $H \subseteq p^{-1}(W)$.

b) Si W *es casi-convexo, entonces* $Q(p^{-1}(W)) = p^{-1}(W)$.

DEMOSTRACIÓN:

a) $\supseteq$) Sea $\chi \in W^o \subseteq (G/H)^\wedge$. Si $y \in p^{-1}(W)$ y $x = p(y)$, entonces $Re((p^\wedge(\chi))(y)) = Re(\chi p(y)) = Re(\chi(x)) \geq 0$; así $p^\wedge(\chi) \in (p^{-1}(W))^o$.

$\subseteq$) Sea $\varphi \in (p^{-1}(W))^o$. Ya que $p^{-1}(W) \supseteq H$, $\varphi(H) = \{1\}$ y existe $\bar{\varphi} \in (G/H)^\wedge$ tal que $\varphi = \bar{\varphi}p = p^\wedge(\bar{\varphi})$. Además $\bar{\varphi} \in W^o$ porque si $x \in W$ e $y \in p^{-1}(x)$, $Re(\bar{\varphi}(x)) = Re(\varphi(y)) \geq 0$. Entonces $\varphi \in p^\wedge(W^o)$.

b) $\supseteq$) Este contenido es evidente ya que $Q(A) \supseteq A$, para todo subconjunto A de G.

$\subseteq$) Sea $z \notin p^{-1}(W)$. Entonces $p(z) \notin W$ y, por ser W casi-convexo, existe $\chi \in W^o$ tal que $Re(\chi(p(z))) < 0$. Aplicando a), $p^\wedge(\chi) \in p^\wedge(W^o) \subseteq (p^{-1}(W))^o$. Entonces $z \notin Q(p^{-1}(W))$.

□

Lema 4.1.6 *Sea* $f: G \to G'$ *un homomorfismo continuo y sea* $A \subset G$ *un subconjunto, entonces*

a) $f^\wedge((f(A))^o) = A^o \cap f^\wedge(G'^\wedge)$

b) $f(Q(A)) \subseteq Q(f(A)) \cap f(G)$, *y la igualdad se verifica si* f *es abierta e inyectiva. En particular, si* B *es un subconjunto de* G', $f(Q(f^{-1}(B))) \subseteq Q(B) \cap f(G)$.

DEMOSTRACIÓN:

a) $\xi \in (f(A))^o$ si y sólo si $Re((f^\wedge(\xi))(a) = Re(\xi(f(a))) \geq 0$, $\forall a \in A$, si y sólo si $f^\wedge(\xi) \in A^o$.

b) Sea $f(x) \in f(Q(A))$ y $\xi \in (f(A))^o$. Como, por el apartado a), $f^\wedge(\xi) \in A^o$ y $x \in Q(A)$, se verifica $Re(\xi(f(x))) = Re((f^\wedge(\xi))(x) \geq 0$ y $f(x) \in Q(f(A))$.
Si f es abierta e inyectiva, $f^\wedge$ es sobre, entonces sea $f(x) \in Q(f(A))$, queremos ver que $x \in Q(A)$. Tomamos $f^\wedge(\xi) \in A^o$, por el apartado a) $\xi \in (f(A))^o$, luego $Re((f^\wedge(\xi))(x) = Re(\xi(f(x))) \geq 0$.

□

Observemos que si H es un subgrupo de G y $B \subseteq G$ es un subconjunto, se verifica $Q_H(B \cap H) \subseteq Q_G(B) \cap H$. Si H es dualmente sumergido se da la igualdad. En efecto, si $g \in Q_G(B) \cap H$ y $\chi \in (B \cap H)^o \subset H^\wedge$, consideramos la extensión de χ, $\overline{\chi} \in (B \cap H)^o \subset G^\wedge$, y tenemos $Re(\chi(g)) = Re(\overline{\chi}(g)) \geq 0$.

En lo que sigue usaremos el siguiente resultado:

Teorema 4.1.7 *([5] 7.8)*
Sea G un grupo topológico de Hausdorff, entonces son equivalentes:

i) α_G *es inyectiva*

ii) para cada $x \in G$, *se cumple* $Q(\{x\}) = \{0, x, -x\}$

iii) $\{0\}$ *es casi-convexo*

4.2 Ejemplos de polares y envolturas

El concepto de casi-convexidad es hasta cierto punto novedoso y como hasta ahora ha sido poco trabajado, necesitamos de algunos cálculos, que aunque se pueden hacer por métodos elementales, no están en la literatura, y requieren elaboración.

$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid = 1\} \equiv \{e^{2\pi i x} : x \in \mathbb{R}\} \equiv \left\{e^{2\pi i x} : x \in \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\} \equiv \left\{e^{\frac{\pi}{2} i t} : t \in (0, 4]\right\}$ con la estructura de grupo dada por la multiplicación en $\mathbb{C}$.

Para los subconjuntos de $\mathbb{T}$ usaremos la siguiente notación: sea $A \subset \mathbb{T}$ un subconjunto y $m \in \mathbb{N}$

$$A^m := \{a^m \in \mathbb{T} : a \in A\}$$

$$A^{1/m} := \{a \in \mathbb{T} : a^m \in A\}$$

Consideraremos los siguientes entornos de 1 (arcos de $\mathbb{T}$ centrados en 1 y de longitud π/n):

$$B_{1/n} := \left\{e^{2\pi i x} : x \in \left[\frac{-1}{4n}, \frac{1}{4n}\right]\right\} \equiv \left\{e^{\frac{\pi}{2} i t} : t \in \left[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right]\right\}$$

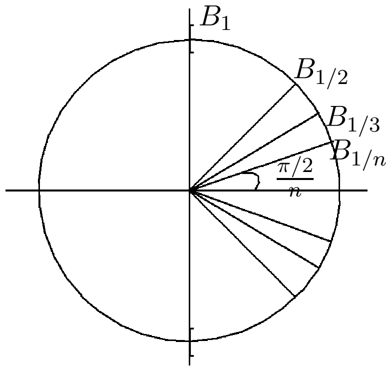


Figura 4.1: Arcos de $\mathbb{T}$ centrados en 1 y de longitud π/n

Observemos que $(B_{1/n})^n = B_1$.

Nos fijaremos también en los arcos de $\mathbb{T}$ centrados en -1 y los denotaremos por $-B_{1/n}$:

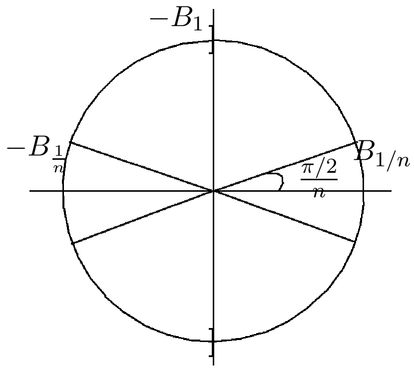


Figura 4.2: Arcos de $\mathbb{T}$ centrados en -1 y de longitud π/n

$$-B_{1/n} := \left\{ e^{2\pi i y} : y \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2} + \frac{1}{4n}\right] \cup \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4n}, \frac{1}{2}\right] \right\} \equiv \left\{ e^{\frac{\pi}{2} i s} : s \in \left[2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right] \right\}$$

ya que si $e^{\frac{\pi}{2}it} \in B_{1/n}$, entonces $-e^{\frac{\pi}{2}it} = e^{\frac{\pi}{2}i(t+2)} \in -B_{1/n}$.

Observemos además que $(-B_{1/n})^n = (-1)^{n+1}B_1$ y por tanto $B_{1/n} \cup (-1)^{n+1}B_{1/n} \subseteq B_1^{1/n}$

En $\mathbb{T}$ los subgrupos son los subconjuntos formados por las raices n-ésimas de la unidad, los notaremos

$$S_n := \left\{e^{2\pi i\frac{k}{n}} : k = 0, \ldots, n-1\right\}$$

Los intervalos de $\mathbb{R}$ de la forma $\left[\frac{k}{n} - \frac{1}{4n}, \frac{k}{n} + \frac{1}{4n}\right]$ con $k \in \mathbb{Z}$, nos dan en $\mathbb{T}$ arcos centrados en las raices n-ésimas de la unidad y de longitud π/n.
Por ejemplo, para $n = 3$ lo tenemos representado en la siguiente figura:

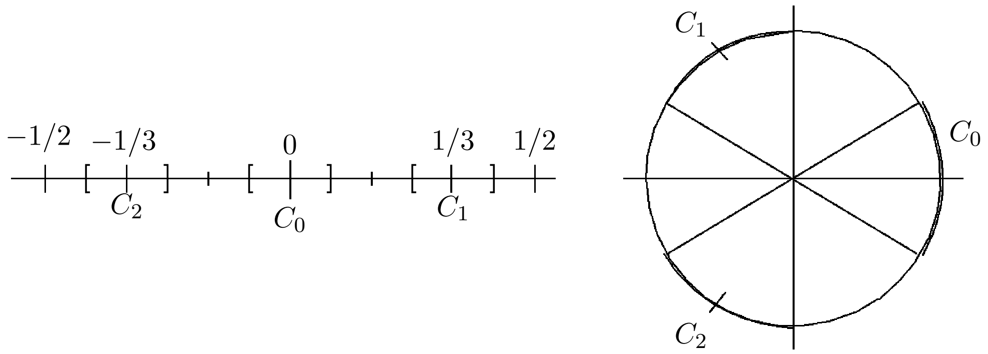


Figura 4.3: Arcos de $\mathbb{T}$ centrados en las raices cúbicas de 1 y de longitud $\pi/3$

El grupo $\mathbb{T}$

Si $G = \mathbb{T}$ (grupo multiplicativo) es conocido que $\mathbb{T}^\wedge \cong \mathbb{Z}$ ([66] pag.51) y el isomorfismo topológico viene dado por:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{T}^\wedge \\ m & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{cccc} \gamma_m : & \mathbb{T} & \to & \mathbb{T} \\ & z & \to & z^m \end{array} \right\} \end{array}$$

- Calculemos la envoltura casi-convexa de los arcos centrados en 1:

$$B_{1/n}^o = \{m \in \mathbb{Z} : Re(z^m) \geq 0, \ \forall z \in B_{1/n}\} =$$

$$= \left\{ m \in \mathbb{Z} : Re(e^{2\pi i x m}) \geq 0,\ \forall x \in \left[\frac{-1}{4n}, \frac{1}{4n}\right] \right\} =$$

$$= \left\{ m \in \mathbb{Z} : mx \in \left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right] + \mathbb{Z},\ \forall x \in \left[\frac{-1}{4n}, \frac{1}{4n}\right] \right\} = \{-n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\}$$

y

$$Q(B_{1/n}) = \{z \in \mathbb{T} : Re(z^m) \geq 0,\ \forall m \in \{-n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\}\} =$$

$$= \left\{ e^{2\pi i x} : mx \in \left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right] + \mathbb{Z},\ \forall m \in \{-n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\} \right\} =$$

$$= \left\{ e^{2\pi i x} : x \in \left[\frac{-1}{4n}, \frac{1}{4n}\right] \right\} = B_{1/n}$$

Así obtenemos una base de entornos de $1 \in \mathbb{T}$ casi-convexos, $\{B_{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea $B \subset \mathbb{T}$ tal que $B_{1/n+1} \subset B \subseteq B_{1/n}$,
entonces $B^o = \{-n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\}$ y $Q(B) = B_{1/n}$.

Sea $B \supset B_1$, entonces $B^o = \{0\}$ y $Q(B) = \mathbb{T}$.

- Veamos un ejemplo en que $Q(A) \cdot Q(A) \neq Q(A \cdot A)$.
  Sea $A = B_{1/3}$, entonces $Q(A) = A$ y $B_{1/2} \subset A \cdot A \subset B_1$

$$Q(A) \cdot Q(A) \subset B_1 = Q(A \cdot A)$$

- Utilizando el Teorema 4.1.7 tenemos que la envoltura casi-convexa de un punto $z \in \mathbb{T}$ es:

$$Q(\{z\}) = \{1, z, z^{-1}\}$$

- Veamos un ejemplo en que $Q(A) \cap Q(B) \neq Q(A \cap B)$.
  Sean $A = \left\{ e^{2\pi i x} : x \in \left[0, \frac{1}{12}\right] \right\}$ y $B = A^{-1} \cup \left\{ e^{2\pi i \frac{1}{12}} \right\}$, entonces

$$A \cap B = \left\{ 1, e^{2\pi i \frac{1}{12}} \right\}$$

y

$$Q(A) = Q(B) = B_{1/3} \supset \left\{ 1, e^{2\pi i \frac{1}{12}}, e^{-2\pi i \frac{1}{12}} \right\} = Q(A \cap B)$$

- Para los subgrupos S_n de raices n-ésimas de la unidad,

$$S_n^o = \{m \in \mathbb{Z} : z^m = 1,\ \forall z \in S_n\} = \left\{ m \in \mathbb{Z} : e^{2\pi i \frac{k}{n} m} = 1,\ \forall k = 0, \cdots, n-1 \right\} =$$

$$= \left\{ m \in \mathbb{Z} : \frac{k}{n} m \in \mathbb{Z},\ \forall k = 0, \cdots, n-1 \right\} = n\mathbb{Z}$$

y

$$Q(S_n) = S_n$$

- Vamos a estudiar las envolturas de la unión y de la intersección de dos subgrupos de raices de la unidad.
  Sean $A = S_n$ y $B = S_k$, con $d = mcd(n,k)$ y $m = mcm(n,k)$, entonces

$$(A \cup B)^o = A^o \cap B^o = n\mathbb{Z} \cap k\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$$

$$Q(A \cup B) = S_m \supseteq S_n \cup S_k = Q(A) \cup Q(B)$$

  y, teniendo en cuenta que la intersección de casi-convexos es casi-convexa y que $A \cap B = S_d$,

$$Q(A \cap B) = S_d = Q(A) \cap Q(B)$$

- Veamos otro ejemplo en que $Q(A \cup B) \neq Q(A) \cup Q(B)$.
  Sean $A = \{-1\}$ y $B = \left\{e^{2\pi i \frac{1}{12}}\right\}$, entonces $A^o = 2\mathbb{Z}$ y $B^o = 3\mathbb{Z}$,

$$(A \cup B)^o = A^o \cap B^o = 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$$

$$Q(A \cup B) = S_6 \supseteq S_2 \cup S_3 = Q(A) \cup Q(B)$$

El grupo $\mathbb{Z}$

Sea $G = \mathbb{Z}$ (grupo aditivo), $\mathbb{Z}^\wedge \cong \mathbb{T}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^\wedge \\ a & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{cccc} \gamma_a : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{T} \\ & 1 & \to & a \end{array} \right\} \end{array}$$

- Dado un entero $m \in \mathbb{Z}$, vamos a buscar su polar:

$$\{m\}^o = \{a \in \mathbb{T} : Re(a^m) \geq 0\} = \{e^{2\pi i t} : Re(e^{2\pi i t m}) \geq 0\} =$$

$$= \left\{e^{2\pi i t} : tm \in \left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right] + \mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{2\pi i t} : t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{k}{m} - \frac{1}{4m}, \frac{k}{m} + \frac{1}{4m}\right]\right\}$$

  es decir,

$$\{m\}^o = \bigcup_{j=0}^{m-1} C_j^m \text{ donde } C_j^m = \left\{e^{2\pi i t} : t \in \left[\frac{j}{m} - \frac{1}{4m}, \frac{j}{m} + \frac{1}{4m}\right]\right\}, \ C_0^m = B_{1/m}$$

  es unión de los arcos de longitud π/m, centrados en las raices m-ésimas de 1.

$${}^oC_0^m = {}^o(B_{1/m}) = \{k \in \mathbb{Z} : Re(e^{2\pi i t k}) \geq 0, \ \forall e^{2\pi i t} \in B_{1/m}\} =$$

$$= \left\{ k \in \mathbb{Z} : Re(e^{2\pi itk}) \geq 0,\ \forall t \in \left[\frac{-1}{4m}, \frac{1}{4m} \right] \right\} =$$

$$= \left\{ k \in \mathbb{Z} : tk \in \left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4} \right],\ \forall t \in \left[\frac{-1}{4m}, \frac{1}{4m} \right] \right\} = \{-m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m\}$$

La envoltura casi-convexa es:

$$Q(\{m\}) = \bigcap_{j=0}^{m-1} {}^{o}C_j^m = \{-m, 0, m\} = Q(\{-m, 0, m\})$$

Observación: Los entornos en $\mathbb{Z}^\wedge$ son de la forma S^o, con $S \subset \mathbb{Z}$ compacto. Por ser $\mathbb{Z}$ discreto, $S = \bigcup_{i \in F} \{m_i\}$ es un conjunto finito. Entonces $S^o = \bigcap_{i \in F} \{m_i\}^o = \bigcap_{i \in F} (\bigcup_{j=0}^{m_i - 1} C_j^{m_i})$, que es la intersección finita de arcos de longitud π/m_i, centrados en las raices m_i-ésimas de 1.

- En particular,

$$\{-2, -1, 0, 1, 2\}^o =$$

$$= \left\{ e^{2\pi it} : t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4} \right] \right\} \bigcap \left\{ e^{2\pi it} : t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{k}{2} - \frac{1}{8}, \frac{k}{2} + \frac{1}{8} \right] \right\} =$$

$$= \left\{ e^{2\pi it} : t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k - \frac{1}{8}, k + \frac{1}{8} \right] \right\} = B_{1/2}$$

y

$$Q(\{-2, -1, 0, 1, 2\}) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\{-m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m\}^o = \bigcap_{j=1}^{m} \{-j, 0, j\}^o = B_{1/m}$$

$$Q(\{-m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m\}) = \{-m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m\}$$

- Sea $S \subset \mathbb{Z}$ un subgrupo, $S = m\mathbb{Z}$,

$$\{m\mathbb{Z}\}^o = \left\{ a \in \mathbb{T} : a^{km} = 1,\ \forall k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ e^{2\pi it} : e^{2\pi itkm} = 1,\ \forall k \in \mathbb{Z} \right\} =$$

$$= \left\{ e^{2\pi it} : tkm \in \mathbb{Z},\ \forall k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ e^{2\pi i \frac{k}{m}} : k \in \mathbb{Z} \right\} = S_m$$

y

$$Q(m\mathbb{Z}) = m\mathbb{Z}$$

El grupo $\mathbb{R}$

Sea $G = \mathbb{R}$ (grupo aditivo), $\mathbb{R}^\wedge \cong \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^\wedge \\ d & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{cccc} \gamma_d : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{T} \\ & x & \rightarrow & e^{2\pi dix} \end{array} \right\} \end{array}$$

- Para los intervalos centrados en 0,

$$[-r, r]^o = \{d \in \mathbb{R} : Re(e^{2\pi dix}) \geq 0,\ \forall x \in [-r, r]\} =$$

$$= \left\{ d \in \mathbb{R} : dx \in \left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right] + \mathbb{Z},\ \forall x \in [-r, r] \right\} = \left[-\frac{1}{4r}, \frac{1}{4r}\right]$$

y

$$Q([-r, r]) = [-r, r]$$

$$(-r, r)^o = [-r, r]^o \quad \text{y} \quad Q((-r, r)) = [-r, r]$$

- Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea el subgrupo $m\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$,

$$\{m\mathbb{Z}\}^o = \left\{ d \in \mathbb{R} : e^{2\pi dix} = 1,\ \forall x \in m\mathbb{Z} \right\} =$$

$$= \{d \in \mathbb{R} : dx \in \mathbb{Z},\ \forall x = \dot{m}\} = \left\{ \frac{k}{m} : k \in \mathbb{Z} \right\} = \frac{1}{m}\mathbb{Z}$$

y

$$Q(m\mathbb{Z}) = m\mathbb{Z}$$

En la siguiente figura podemos observar como actuan las aplicaciones γ_d para $d = \frac{1}{m}, \cdots, \frac{m-1}{m}$

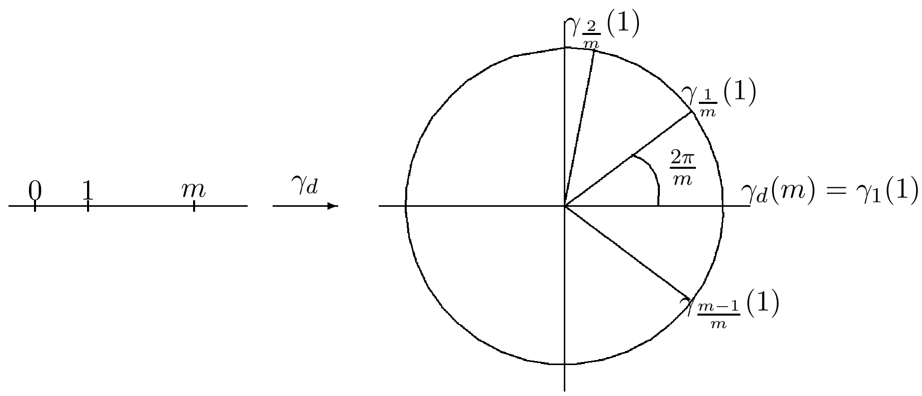


Figura 4.4: Aplicaciones γ_d para $d = \frac{1}{m}, \cdots, \frac{m-1}{m}$

- Para $r \in \mathbb{R}$,

$$\{r\}^o = \{d \in \mathbb{R} : Re(e^{2\pi dir}) \geq 0\} = \left\{d \in \mathbb{R} : dr \in \left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right] + \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{k}{r} - \frac{1}{4r}, \frac{k}{r} + \frac{1}{4r}\right]$$

y

$$Q(\{r\}) = \{d \in \mathbb{R} : Re(e^{2\pi dix}) \geq 0, \forall x \in \{r\}^o\} =$$

$$= \left\{d \in \mathbb{R} : dx \in \left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right] + \mathbb{Z}, \forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{k}{r} - \frac{1}{4r}, \frac{k}{r} + \frac{1}{4r}\right]\right\} = \{-r, 0, r\}$$

- Para $m \in \mathbb{N}$, tenemos una situación similar a la que encontramos en $\mathbb{Z}$

$$\{-m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m\}^o = \bigcap_{j=1}^{m} \{-j, 0, j\}^o =$$

$$= \bigcap_{j=1}^{m} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{k}{j} - \frac{1}{4j}, \frac{k}{j} + \frac{1}{4j}\right] \right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k - \frac{1}{4m}, k + \frac{1}{4m}\right]$$

y

$$Q(\{-m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m\}) = \{-m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m\}$$

- Sin embargo, si consideramos el conjunto

$$A := \left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Tenemos

$$A^o = \left\{d \in \mathbb{R} : Re\left(e^{2\pi i d \frac{1}{n}}\right) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{d \in \mathbb{R} : \frac{d}{n} \in \left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right] + \mathbb{Z}, \forall n\right\} =$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[nk - \frac{n}{4}, nk + \frac{n}{4}\right] \right) = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$

Entonces,

$$Q(A) = [-1, 1]$$

El grupo $\mathbb{Q}$

Sea $G = \mathbb{Q}$ (grupo aditivo).

Observemos que $\mathbb{Q}$ es un subgrupo denso de $\mathbb{R}$, por tanto todo carácter continuo de $\mathbb{Q}$ se puede extender a un carácter continuo de $\mathbb{R}$. Así pues, $\mathbb{Q}^\wedge = \mathbb{R}^\wedge$.

Para el cálculo de polares y envolturas casi-convexas podemos usar los de $\mathbb{R}$.

Sea $A \subseteq \mathbb{Q}$, entonces $A^o \subseteq \mathbb{R}^\wedge$ y $Q_{\mathbb{Q}}(A) = Q_{\mathbb{R}}(A) \cap \mathbb{Q}$.

El grupo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Sea $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (grupo aditivo), $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^\wedge \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- Veamos un ejemplo en que $(A_1 \times A_2)^o \neq A_1^o \times A_2^o$.
  Sean $A_1 = A_2 = I = [0,1]$, entonces:

$$I^o \times I^o = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \times \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$

$$(I \times I)^o = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : Re(e^{2\pi i(d_1x_1 + d_2x_2)}) \geq 0,\ \forall (x_1, x_2) \in I \times I\} =$$
$$= \left\{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : d_1x_1 + d_2x_2 \in \left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right] + \mathbb{Z},\ \forall (x_1, x_2) \in I \times I\right\} =$$
$$= \left\{(d_1, d_2) \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \times \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] : |d_1 + d_2| \leq \frac{1}{4}\right\}$$

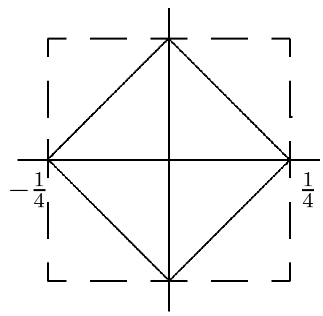


Figura 4.5: Polares $(I \times I)^o \subset I^o \times I^o$

Observemos que en este caso $(0,0) \in A_1 \times A_2$ y se da el contenido estricto $(A_1 \times A_2)^o \subset A_1^o \times A_2^o$.

Sin embargo, se verifica:

$$Q(I \times I) = [-1,1] \times [-1,1] = Q(I) \times Q(I)$$

- Dado un punto $(r,s) \in \mathbb{R}^2$, sabemos por el Teorema 4.1.7:

$$Q(\{(r,s)\}) = \{(0,0),(r,s),(-r,-s)\}$$

Vamos a calcular el polar de un punto:

$$\{(r,s)\}^o = \{(d_1,d_2) \in \mathbb{R}^2 : Re(e^{2\pi i(rd_1+sd_2)}) \geq 0\} =$$
$$= \left\{(d_1,d_2) \in \mathbb{R}^2 : rd_1 + sd_2 \in \left[\frac{-1}{4},\frac{1}{4}\right] + \mathbb{Z},\right\}$$

Son los puntos comprendidos entre los pares de rectas $rx + sy = -\dfrac{1}{4} + k$, $rx + sy = \dfrac{1}{4} + k$, con k tomando valores en $\mathbb{Z}$.
Para el punto $(r,s) = (1,1)$ tenemos:

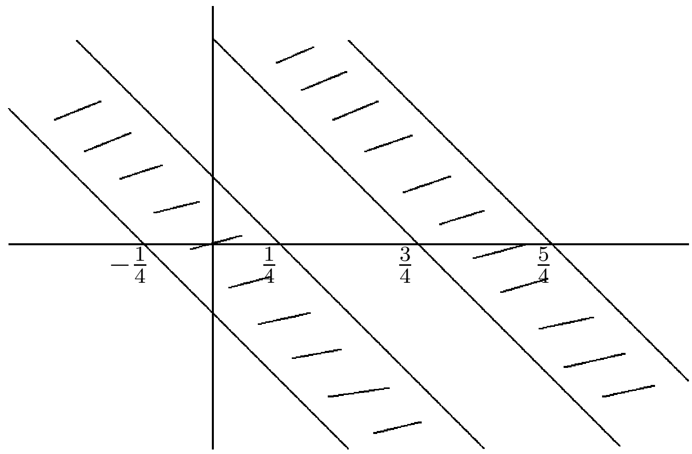


Figura 4.6: Polar de un punto $\{(1,1)\}^o$

En este ejemplo también podemos observar que, en general, $(A_1 \times A_2)^o \neq A_1^o \times A_2^o$ y que no se da ninguno de los dos contenidos.
Sea $A_1 = A_2 = \{1\}$, entonces $A_1^o = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k - \dfrac{1}{4}, k + \dfrac{1}{4}\right]$ y $A_1^o \times A_2^o$ es la unión de cuadros de lado 1/2 centrados en los enteros:

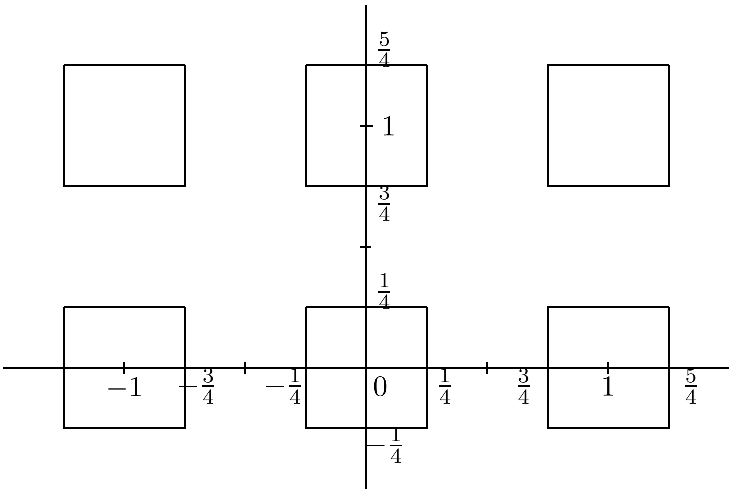


Figura 4.7: Producto de polares $\{1\}^o \times \{1\}^o$

- El polar de dos puntos es la intersección de los polares de cada punto, por ejemplo, si $A_1 = \{1, -1\}$ y $A_2 = \{1\}$, entonces $(A_1 \times A_2)^o = \{(1, 1), (-1, 1)\}^o = \{(1, 1)\}^o \cap \{(-1, 1)\}^o$:

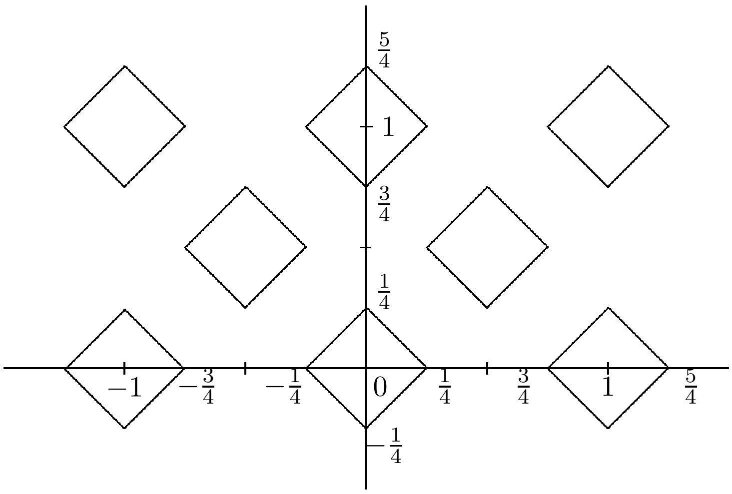


Figura 4.8: Polar de dos puntos $\{(1, 1), (-1, 1)\}^o$

Sin embargo, si tomamos B_1 y B_2 que contengan a 0, por ejemplo $B_1 = B_2 = \{-1, 0, 1\}$, entonces $(B_1 \times B_2)^o$ son los rombos de la siguiente figura:

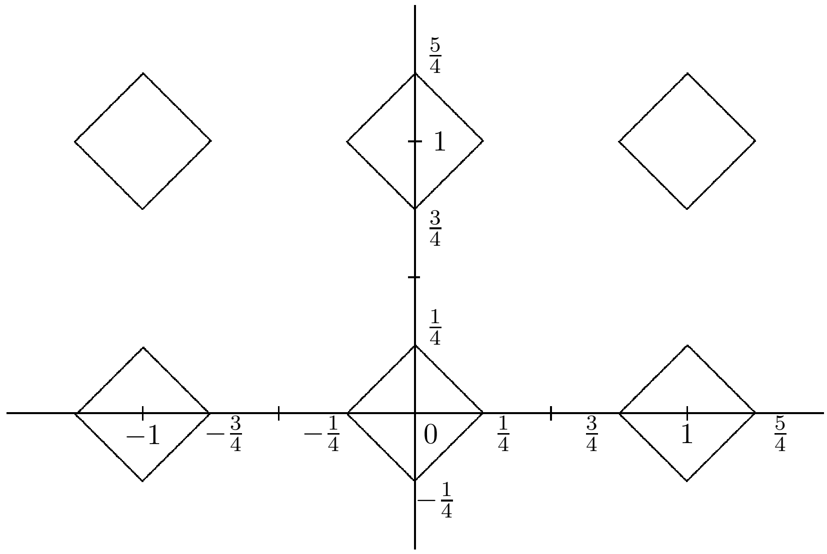


Figura 4.9: Polar de un producto $(B_1 \times B_2)^o$

y tenemos que se verifica la inclusión $(B_1 \times B_2)^o \subset B_1^o \times B_2^o$.

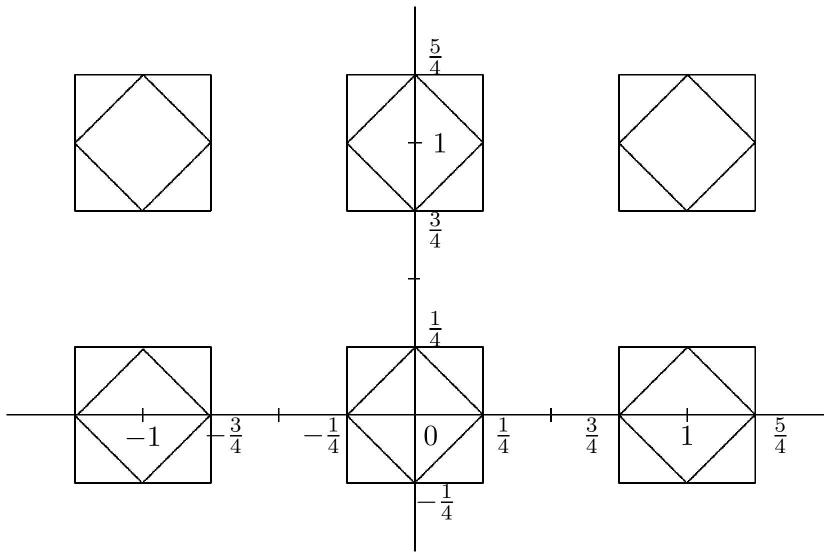


Figura 4.10: Polar de un producto y producto de polares $(B_1 \times B_2)^o \subset B_1^o \times B_2^o$

- Veamos ahora un ejemplo en que $Q(A_1 \times A_2) \neq Q(A_1) \times Q(A_2)$.
  Sea $A_1 = A_2 = \{1\}$, entonces:

$$Q(A_1 \times A_2) = Q(\{(1,1)\}) = \{(0,0), (1,1), (-1,-1)\}$$

$$Q(A_1) \times Q(A_2) = \{0, 1, -1\} \times \{0, 1, -1\}$$

y se cumple $Q(A_1 \times A_2) \subset Q(A_1) \times Q(A_2)$.

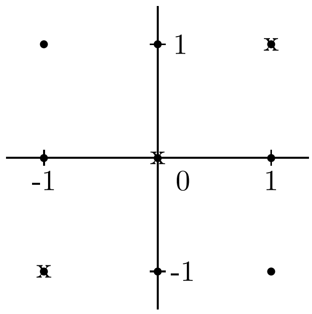


Figura 4.11: Envolturas $Q(\{1\} \times \{1\}) \subset Q(\{1\}) \times Q(\{1\})$

4.3 Definición y propiedades

Diremos que un grupo topológico G es *localmente casi-convexo* si admite una base de entornos de cero formada por conjuntos casi-convexos.

De la definición se deduce directamente que un grupo localmente casi-convexo de Hausdorff tiene suficientes caracteres continuos y por tanto las aplicaciones α_G y κ_G son inyectivas. También se deduce que son abiertas en la imagen, como enunciamos en la siguiente Proposición. Sin embargo pueden no ser abiertas (cfr. Ejemplo 4.5.5).

Proposición 4.3.1 *Si G es un grupo topológico localmente casi-convexo, las aplicaciones $\alpha_G \colon G \to \alpha_G(G)$ y $\kappa_G \colon G \to \kappa_G(G)$ son abiertas.*

DEMOSTRACIÓN: En [8] Lemma 14.3 encontramos la demostración de que α_G es abierta y de forma similar se obtiene para κ_G. $\square$

Las siguientes proposiciones nos proporcionan ejemplos de grupos localmente casi-convexos.

Proposición 4.3.2 *Si G es un grupo topológicamente isomorfo al dual de algún grupo topológico H (i.e. si G admite un predual), entonces G es localmente casi-convexo.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos identificar G con $H^\wedge$. Los conjuntos de la forma S^o, donde $S \subset H$ es compacto, forman una base de entornos de 0 en $H^\wedge$ ([8] Proposition 1.3) y son casi-convexos (Lema 4.1.1). $\square$

Todo grupo reflexivo G es localmente casi-convexo, basta considerarlo como el dual de su dual, $G \cong (G^\wedge)^\wedge$. Así también, del Teorema de dualidad de Pontryagin se deduce que los grupos localmente compactos son localmente casi-convexos

Lema 4.3.3 *([8] Proposition 2.4)*
Un espacio vectorial topológico de Hausdorff es localmente convexo si y sólo si, con su estructrura aditiva, es un grupo de Hausdorff localmente casi-convexo.

Proposición 4.3.4 *Todo subgrupo de un grupo localmente casi-convexo es localmente casi-convexo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $H \subset G$ un subgrupo de un grupo topológico localmente casi-convexo y $V \in \mathcal{B}_G(0)$ casi-convexo. Veamos que $V \cap H \in \mathcal{B}_H(0)$ es casi-convexo en H. Si $x \in H \setminus V \cap H$, existe $\chi \in \Gamma G$ tal que $Re(\chi(x)) < 0$ y $Re(\chi(y)) \geq 0$, $\forall y \in V$. Basta tomar $\chi_{|H}$. $\square$

Hemos visto anteriormente algunas propiedades generales de grupo que vienen determinadas por poseerlas un subgrupo abierto; la casi-convexidad local es una de ellas.

Proposición 4.3.5 *Si $A \subset G$ es un subgrupo abierto, entonces G es localmente casi-convexo si y sólo si A lo es.*

DEMOSTRACIÓN: Todo subgrupo de un grupo localmente casi-convexo es también localmente casi-convexo. Veamos que para subgrupos abiertos se verifica el recíproco. Utilizaremos que todo subgrupo abierto de un grupo topológico es dualmente sumergido y dualmente cerrado (Proposición 3.3.6).
Sea $U \in \mathcal{B}_G(0)$, queremos encontrar un entorno de 0, $V \subset U$, casi-convexo. Tenemos $U \cap A \in \mathcal{B}_A(0)$ y estamos suponiendo que A es localmente casi-convexo, entonces existe un entorno casi-convexo $V_A \subset U \cap A$. Por ser A abierto, $V_A \in \mathcal{B}_G(0)$; veamos que también es casi-convexo en G y así podemos tomar $V = V_A$.
Sea $x \in G \setminus V_A$, distinguimos dos casos. Si $x \in A$, existe $\chi \in \Gamma A$ tal que $Re(\chi(x)) < 0$ y $Re(\chi(V_A)) \geq 0$ y por ser A dualmente sumergido, χ se puede extender a G. Por

último, si $x \notin A$, por ser A dualmente cerrado, existe $\chi \in \Gamma G$ tal que $Re(\chi(x)) < 0$ y $Re(\chi(A)) \geq 0$. □

Los cocientes de localmente casi-convexos no son en general localmente casi-convexos. Por ejemplo, todo espacio normado X, contiene un subgrupo $Y \subset X$ discreto, débilmente denso y entonces el cociente X/Y que no es trivial, verifica $(X/Y)^\wedge = \{0\}$ ([7], [79]). Y, de hecho, todo grupo topológico de Hausdorff es cociente de un grupo topológico de Hausdorff localmente casi-convexo ([5] 12.8).

Sin embargo tenemos el siguiente resultado para cocientes por subgrupos compactos:

Proposición 4.3.6 *Sea G un grupo topológico con α_G continua y K un subgrupo compacto. Si G es localmente casi-convexo, G/K es localmente casi-convexo.*

DEMOSTRACIÓN: Por ser G localmente casi-convexo y α_G continua, $\alpha_G : G \to \alpha_G(G)$ es isomorfismo topológico. Por otra parte, $\alpha_G(K) = K^{oo} \cap \alpha_G(G)$ ya que todo subgrupo compacto de un grupo con suficientes caracteres continuos es casi-convexo (Proposición 3.3.4, [8](14.1)). Así $G/K \cong \alpha_G(G)/\alpha_G(K) = \alpha_G(G)/(K^{oo} \cap \alpha_G(G))$ es un subgrupo topológico de $G^{\wedge\wedge}/K^{oo}$. Teniendo en cuenta que K^o es un subgrupo abierto de $G^\wedge$, la aplicación canónica $G^{\wedge\wedge}/K^{oo} \to (K^o)^\wedge$ es isomorfismo topológico ([10] Lemma 2.2(f)). Claramente $(K^o)^\wedge$ es localmente casi-convexo por ser un dual.

□

Veremos más adelante que el recíproco también es cierto.

Proposición 4.3.7 *El producto arbitrario de grupos localmente casi-convexos es localmente casi-convexo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{G_i : i \in I\}$ una familia de grupos localmente casi-convexos y $p_j : \prod G_i \to G_j$ la proyección canónica. Si $V \in \mathcal{B}_{\prod G_i}(0)$ es un entorno básico y $F \subset I$ es un subconjunto finito de índices tal que $p_i(V) = G_i$ para todo $i \in I \setminus F$, tomamos $U_i \in \mathcal{B}_{G_i}(0)$ casi-convexo con $U_i \subset p_i(V)$, para cada $i \in F$, y formamos $U := \bigcap_{i \in F} p_i^{-1}(U_i)$. Obtenemos así un entorno $U \subset V$ casi-convexo. En efecto, si $x \notin U$, existe $j \in F$ con $x_j \notin p_j(U) = U_j$. Como U_j es casi-convexo, existe $\varphi \in \Gamma G_j$ tal que $Re(\varphi(x_j)) < 0$ y $Re(\varphi(U_j)) \geq 0$. Definimos ahora $\tilde{\varphi} = \varphi p_j$, que es un carácter continuo que cumple lo que queríamos ya que $\tilde{\varphi}(U) = \varphi(U_j)$ y $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x_j)$. □

Lema 4.3.8 *Si (G, τ) es un grupo topológico, entonces $G^+ = (G, \tau^+)$ es localmente casi-convexo.*

DEMOSTRACIÓN: El grupo (G, τ^+) puede identificarse a un subgrupo de $\mathbb{T}^{G^\wedge}$. Teniendo en cuenta que los grupos compactos son localmente casi-convexos y asímismo lo son sus subgrupos, tenemos que (G, τ^+) es localmente casi-convexo. □

En analogía con los espacios vectoriales topológicos ([58] 18.4(4)), tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.3.9 *Sea (G, τ) un grupo topológico y sea τ' una topología de grupo en G tal que:*

1. $\tau' < \tau$
2. *τ tiene una base de entornos de cero τ'-cerrados*

Si $B \subset G$ es τ'-completo, entonces B es τ-completo.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una red en $B \subset G$ que es de Cauchy en τ. En particular, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es de Cauchy en τ'. Por tanto converge en τ' a un $x \in B$. Dado ahora $V \in \mathcal{B}_\tau(0)$, podemos tomarlo τ'-cerrado y consideramos $\alpha_0 \in A$ tal que $x_\alpha - x_\beta \in V$, $\forall \alpha, \beta \geq \alpha_0$. Fijamos α y tenemos que $x_\alpha - x \in V$ ya que $x_\alpha - x$ es τ'-límite de la red $\{x_\alpha - x_\beta\}_{\beta \in A}$. Como ésto es cierto para todo $\alpha \geq \alpha_0$, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ está eventualmente en $x + V$, luego $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$. □

Proposición 4.3.10 *Si G es un grupo localmente casi-convexo, todo subconjunto completo en la topología de Bohr, es completo en la topología dada.*

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar la Proposición 4.3.9, teniendo en cuenta que si G es localmente casi-convexo, tiene una base de entornos débilmente cerrados (i.e. cerrados en la topología de Bohr). □

Lema 4.3.11 *([30] Teorema 3.7.)*
Sea G un grupo topológico, entonces:

1. *El grupo dual de $(G, \omega(G, \Gamma G))$ es ΓG.*

2. *Si ΓG separa puntos de G, cada carácter continuo de $(\Gamma G, \omega(\Gamma G, G))$ es la evaluación en algún punto de G, i.e. el dual de $(\Gamma G, \omega(\Gamma G, G))$ se puede identificar algebraicamente con G.*

La identificación del Lema 4.3.11(2) es también topológica en algunas clases de grupos:

Lema 4.3.12 *Si G es un grupo localmente casi-convexo, metrizable y completo, el dual $X = (\Gamma G, \omega(\Gamma G, G))^\wedge$ es topológicamente isomorfo a G.*

DEMOSTRACIÓN: Por el Lema 4.3.11(2), X se identifica algebraicamente con G. Sea $K \subset \Gamma G$ un $\omega(\Gamma G, G)$-compacto, por la Proposición 3.1.12, K es equicontinuo. Ya que ${}^oK$ se puede identificar con $K^o \cap \alpha_G(G)$, tenemos que cada entorno de 0 en X es entorno de 0 en G (Lema 3.1.5).
Recíprocamente, si V es un entorno de 0 casi-convexo en G, V^o es $\omega(\Gamma G, G)$-compacto y $V = {}^o(V^o)$ es entorno de 0 en X. □

4.4 Otras propiedades de las aplicaciones α_G y $\alpha_{G^\wedge}$

Proposición 4.4.1 *Sea G un grupo topológico con α_G continua. Entonces:*

a) Si $\alpha_{G^\wedge}$ es continua y $\alpha_G(G) \subset G^{\wedge\wedge}$ es denso, $G^\wedge$ es reflexivo.

b) Si α_G es sobre, $\alpha_{G^\wedge}$ es sobre y abierta.

DEMOSTRACIÓN: Observemos que $\alpha_{G^\wedge}$ es inyectiva por ser $G^\wedge$ localmente casi-convexo. Si α_G es continua podemos considerar su dual $\alpha_G^\wedge$, que es también continua y se verifica $\alpha_G^\wedge \alpha_{G^\wedge} = id_{G^\wedge}$, ya que $\forall \varphi \in G^\wedge$ y $\forall x \in G$, $\alpha_G^\wedge(\alpha_{G^\wedge}(\varphi))(x) = \alpha_{G^\wedge}(\varphi)(\alpha_G(x)) = \alpha_G(x)(\varphi) = \varphi(x)$.

a) Consideremos la composición $G^{\wedge\wedge\wedge} \xrightarrow{\alpha_G^\wedge} G^\wedge \xrightarrow{\alpha_{G^\wedge}} G^{\wedge\wedge\wedge}$. Veamos que $(\alpha_{G^\wedge}\alpha_G^\wedge)(\xi)_{|\alpha_G(G)} = \xi_{|\alpha_G(G)}$, para todo $\xi \in G^{\wedge\wedge\wedge}$. En efecto, sea $x \in G$, $(\alpha_{G^\wedge}\alpha_G^\wedge)(\xi)(\alpha_G(x)) = \alpha_G(x)(\alpha_G^\wedge(\xi)) = \alpha_G^\wedge(\xi)(x) = \xi(\alpha_G(x))$. Entonces, las aplicaciones continuas $(\alpha_{G^\wedge}\alpha_G^\wedge)(\xi)$ y ξ toman los mismos valores en el subconjunto denso $\alpha_G(G)$ y por tanto coinciden. Es decir, $\alpha_{G^\wedge}\alpha_G^\wedge = id_{G^{\wedge\wedge\wedge}}$. Luego $\alpha_{G^\wedge}$ es biyectiva y tiene inversa continua, con lo que es también abierta.

b) Si α_G es sobre, se obtiene más fácilmente que en el apartado a) que $\alpha_{G^\wedge}\alpha_G^\wedge = id_{G^{\wedge\wedge\wedge}}$. Para probar que $\alpha_G^\wedge$ es abierta, basta tener en cuenta que $G^\wedge$ es localmente casi-convexo.

$\square$

Los *grupos nucleares* fueron introducidos por Banaszczyk en [8]. La clase de los grupos nucleares contiene a los espacios nucleares localmente convexos y a los grupos localmente compactos. Además, es una clase cerrada por productos arbitrarios, sumas numerables, subgrupos y cocientes de Hausdorff. También la complección de un grupo nuclear es nuclear ([5] 21.4) y el dual de un grupo nuclear metrizable es nuclear ([5] 20.30). Sin embargo, el dual de un grupo nuclear no siempre es nuclear. Todo grupo nuclear es localmente casi-convexo ([8]) y respeta compacidad ([11]).

Proposición 4.4.2 *Si G es un grupo nuclear que no es precompacto, α_{G^+} no es continua.*

DEMOSTRACIÓN: Siempre se verifica $\Gamma G^+ = \Gamma G$. Además, en este caso, por ser G nuclear, G y G^+ tienen los mismos compactos ([11]), por lo que $(G^+)^\wedge = G^\wedge$, y en consecuencia $\alpha_G(G) = \alpha_{G^+}(G^+)$.
Supongamos que α_{G^+} es continua y llegaremos a una contradicción.
Por ser G y G^+ localmente casi-convexos, α_G y α_{G^+} son inyectivas y abiertas en la imagen. Considerando el siguiente diagrama commutativo, donde id y α_{G^+} son continuas,

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{id} & G^+ \\ {\scriptstyle\alpha_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_{G^+}} \\ \alpha_G(G) & = & \alpha_{G^+}(G^+) \end{array}$$

obtenemos que α_{G^+} es un encaje isomórfico, luego $\tau = \tau^+$ y esto no es posible ya que G^+ es siempre precompacto y estamos suponiendo que G no lo es. $\square$

Observemos que la Proposición 4.4.2 da muchos ejemplos de grupos para los que no es continua la aplicación canónica en el bidual. Destacamos $\alpha_{\mathbb{R}^+}$, $\alpha_{\mathbb{Q}^+}$, $\alpha_{\mathbb{Z}^+}$ y cualquier α_{X^+} para X localmente compacto, no compacto. Observemos también que G^+ es un grupo nuclear para cualquier G. Obtenemos por tanto un elenco de grupos nucleares que están en ese caso.

Proposición 4.4.3 *$\alpha_{G^\wedge}$ continua, no implica α_G continua.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X un grupo localmente compacto, no compacto. Consideramos $G := X^+ = (X, \tau^+)$, el grupo con su topología de Bohr. Los duales $(X^+)^\wedge$ y $X^\wedge$ coinciden algebraicamente y topológicamente ya que por el teorema de Glicksberg X y X^+ tienen los mismos subconjuntos compactos. $X^\wedge$ es localmente compacto, luego $\alpha_{(X^+)^\wedge}$ es continua. Sin embargo, aplicando la Proposición 4.4.2 a X que es nuclear por ser localmente compacto y no es precompacto, tenemos que α_{X^+} no es continua. □

4.5 Propiedades de la evaluación

Sea G un grupo topológico. Denotaremos por e_G y $e_{G^\wedge}$, las respectivas evaluaciones canónicas de G y $G^\wedge$,

$$e_G \colon G^\wedge \times G \to \mathbb{T} \quad \text{y} \quad e_{G^\wedge} \colon G^{\wedge\wedge} \times G^\wedge \to \mathbb{T}$$

y sean $\varphi_0 \in G^\wedge$ y $\chi_0 \in G^{\wedge\wedge}$ los caracteres tales que $\varphi_0(g) = 1$ para todo $g \in G$ y $\chi_0(\xi) = 1$ para todo $\xi \in G^\wedge$.

En [63] y [82] se estudia la relación entre la continuidad de la evaluación y la compacidad local, resultados que aquí vamos a utilizar.

Teorema 4.5.1 *([63]) Si G es un grupo topológico reflexivo, entonces son equivalentes:*

a) e_G es continua

b) G es localmente compacto

Corolario 4.5.2 *([63]) Si α_G es un encaje isomórfico, entonces son equivalentes:*

a) e_G es continua

b) $G^\wedge$ es localmente compacto

Además, si se verifican estas condiciones, $\alpha_G(G)$ es denso en $G^{\wedge\wedge}$.

Teorema 4.5.3 *([82]) Si G es un grupo topológico, son equivalentes:*

a) e_G *es continua en* $(\varphi_0, 0)$

b) e_G *es continua*

c) α_G *es continua y* $G^\wedge$ *es localmente compacto*

Corolario 4.5.4 *([82]) Si* G *es un grupo topológico tal que* α_G *es inyectiva y abierta, entonces son equivalentes:*

a) e_G *es continua*

b) G *es localmente compacto*

Sin embargo, en 4.5.4 no se puede debilitar la condición α_G abierta requiriendo únicamente α_G abierta en la imagen, como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.5.5 *El grupo* $G = \mathbb{Q}$ *no es localmente compacto, sin embargo* $\mathbb{Q}^\wedge \cong \mathbb{R}$ *es localmente compacto. Por otra parte,* α_G *es inyectiva y abierta en la imagen por ser* $\mathbb{Q}$ *localmente casi-convexo y es continua por ser* $\mathbb{Q}$ *un espacio métrico. Luego* e_G *es continua (Corolario 4.5.2). Y así,* α_G *es un encaje isomórfico, aunque no es sobre, ni abierta (Corolario 4.5.4).*

Esta situación se repite en cualquier grupo localmente casi-convexo, no localmente compacto, con e_G continua.

Proposición 4.5.6 *Sea* G *un grupo topológico localmente casi-convexo que no es localmente compacto. Si* e_G *es continua, entonces* $\alpha_G\colon G \to G^{\wedge\wedge}$ *no es sobre ni abierta. Sin embargo es abierta en la imagen,* $\alpha_G\colon G \to \alpha_G(G) \subset G^{\wedge\wedge}$*.*

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que α_G es continua por serlo e_G y es inyectiva y abierta en la imagen por ser G localmente casi-convexo.
Si α_G fuese sobre, G sería reflexivo y por el Teorema 4.5.1 sería localmente compacto.
Si α_G fuese abierta, G sería localmente compacto por el Corolario 4.5.4. □

Corolario 4.5.7 *Si* $e_{G^\wedge}$ *es continua y* $G^\wedge$ *no es localmente compacto,* $\alpha_{G^\wedge}(G^\wedge)$ *es un subgrupo denso de* $G^{\wedge\wedge\wedge}$ *distinto del total.*

DEMOSTRACIÓN: Con la hipótesis de $e_{G^\wedge}$ continua se obtiene que $\alpha_{G^\wedge}$ es continua y, por tanto, es un encaje isomórfico, ya que $G^\wedge$ es siempre localmente casi-convexo. Aplicando el Corolario 4.5.2 tenemos que $G^{\wedge\wedge}$ es localmente compacto y $\alpha_{G^\wedge}(G^\wedge)$ es denso en $G^{\wedge\wedge\wedge}$ que también es localmente compacto y, por tanto, contiene estrictamente a $\alpha_{G^\wedge}(G^\wedge)$ que no lo es. □

Proposición 4.5.8 *Si e_G es continua, $e_{G^\wedge}$ también lo es. La recíproca no es cierta.*

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 4.5.3, $G^\wedge$ es localmente compacto y $e_{G^\wedge}$ es continua.
En la demostración de 4.4.3 se da un ejemplo de una clase de grupos G para los que $e_{G^\wedge}$ es continua (por ser $G^\wedge$ localmente compacto) y ni α_G, ni por tanto e_G, son continuas. □

Proposición 4.5.9 *Si α_G es continua, entonces son equivalentes:*

a) e_G *es continua*

b) $e_{G^\wedge}$ *es continua*

DEMOSTRACIÓN:

a) $\Rightarrow$ b) Se cumple siempre, por la Proposición anterior.

b) $\Rightarrow$ a) Sea $U \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1)$, por ser $e_{G^\wedge}$ continua, existen $V^{\chi_0} \in \mathcal{B}_{G^{\wedge\wedge}}(\chi_0)$ y $V^{\varphi_0} \in \mathcal{B}_{G^\wedge}(\varphi_0)$ tal que $e_{G^\wedge}(V^{\chi_0} \times V^{\varphi_0}) \subseteq U$. Por otra parte, al ser α_G continua, existe $V \in \mathcal{B}_G(0)$ tal que $\alpha_G(V) \subseteq V^{\chi_0}$ y así $e(V^{\varphi_0} \times V) \subseteq U$. □

Corolario 4.5.10 *Si e_G es continua, entonces α_G y $\alpha_{G^\wedge}$ son continuas.*

El recíproco no es cierto. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.5.11 *Sea G un grupo reflexivo, no localmente compacto. Entonces $G^\wedge$ es también reflexivo y α_G y $\alpha_{G^\wedge}$ son continuas. Sin embargo e_G no es continua ya que $G^\wedge$ no es localmente compacto (Corolario 4.5.2).*
Por el mismo motivo $e_{G^\wedge}$ no es continua.

4.6 Modificación localmente casi-convexa de una topología de grupo

Lema 4.6.1 *Sea (G,τ) un grupo topológico. Las envolturas casi-convexas de los entornos de cero en (G,τ) constituyen una base de entornos de cero de una topología de grupo τ_e en G. Además, τ_e es menos fina que τ.*

DEMOSTRACIÓN: Definimos la topología τ_e en G tomando como base de entornos de cero la familia $\mathcal{Q} = \{Q(V) \mid V \in \mathcal{B}_{(G,\tau)}(0)\}$. Entonces:

- τ_e es una topología de grupo. Por ([19] Cap.III §1.2), es suficiente probar:
  - $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ y es una base de filtro, ya que $Q(V_1 \cap V_2) \subseteq Q(V_1) \cap Q(V_2)$ para todo $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_{(G,\tau)}(0)$ (Proposición 4.1.3 (i)).
  - Para cada $Q(V) \in \mathcal{Q}$ existe $U \in \mathcal{B}_{(G,\tau)}(0)$ tal que $U + U \subseteq V$ y por Proposición 4.1.3 (iii) $Q(U) + Q(U) \subseteq Q(U+U) \subseteq Q(V)$.
  - Cada $Q(V)$ es simétrico (Proposición 4.1.3 (iv)).
- $\tau_e \leq \tau$ ya que $V \subseteq Q(V)$, $\forall V \in \mathcal{B}_{(G,\tau)}(0)$.

□

Proposición 4.6.2 *Sea (G,τ) un grupo topológico, entonces:*

a) La topología de Bohr, τ^+, satisface $\tau^+ \leq \tau_e$

b) $\Gamma(G,\tau_e) = \Gamma(G,\tau)$

c) τ_e es localmente casi-convexa

DEMOSTRACIÓN: Veamos $\tau^+ \leq \tau_e$. Las intersecciones finitas de conjuntos de la forma $\varphi^{-1}(B_1)$ con $\varphi \in \Gamma(G,\tau)$, constituyen una base de entornos de cero en (G,τ^+). Es inmediato que dichos conjuntos son casi-convexos y por tanto $\varphi^{-1}(B_1) = Q(\varphi^{-1}(B_1)) \in \mathcal{B}_{\tau_e}(0)$.
La topología de Bohr y la del grupo tienen el mismo dual, luego, como $\tau^+ \leq \tau_e \leq \tau$, los grupos (G,τ_e) y (G,τ) tiene también el mismo dual.
Entonces, $Q_{\tau_e}(S) = Q_\tau(S)$, para todo subconjunto $S \subset G$, y τ_e es localmente casi-convexa por su definición.

□

Observemos que si (G,τ) tiene suficientes caracteres continuos, entonces τ^+ es de Hausdorff y así también lo es τ_e.

Corolario 4.6.3 *Sea (G,τ) un grupo topológico, entonces:*

a) *τ_e es la topología más fina de las topologías de grupo, localmente casi-convexas, menos finas que τ.*

b) *Si (G,τ) es localmente casi-convexo, $\tau = \tau_e$.*

DEMOSTRACIÓN:

a) Veamos que τ_e es la más fina con esas condiciones. Sea τ_1 otra topología de grupo localmente casi-convexa tal que $\tau_1 < \tau$. Sea V un entorno casi-convexo de cero en τ_1. En particular, V es entorno de cero en τ y $Q_\tau(V) \subseteq Q_{\tau_1}(V) = V$. Por tanto V contiene un entorno de cero de τ_e.

b) Se deduce de a).

□

A la topología τ_e, definida en un grupo (G,τ), la denominaremos *topología localmente casi-convexa asociada.*

En [30] se demuestra que toda topología localmente casi-convexa, en un grupo G, es la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos de una adecuada familia $\mathfrak{S}$ de ΓG ($\mathfrak{S}$-*topología*). La topología de Bohr, τ^+, es la $\mathfrak{S}$-topología de los subconjuntos finitos de ΓG, es por tanto la topología localmente casi-convexa menos fina compatible con la dualidad.

Proposición 4.6.4 *Sea (G,τ) un grupo topológico, τ_e es la $\mathfrak{S}$-topología de la familia de todos los subconjuntos equicontinuos de ΓG.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que ver que los entornos de cero en τ_e son precisamente los polares de los equicontinuos de ΓG.
Si $V \in \mathcal{B}_G(0)$, $V^o \subset \Gamma G$ es equicontinuo. Por tanto, todo entorno básico de cero en τ_e, $Q(V) = {}^o(V^o)$, es el polar de un equicontinuo.
Si $H \subset \Gamma G$ es equicontinuo, entonces existe $U \in \mathcal{B}_G(0)$ tal que $H \subset U^o$ y así, ${}^oH \supset {}^o(U^o) = Q(U)$, el polar de todo equicontinuo de ΓG contiene un entorno de cero en τ_e.

□

Veamos que si un cociente de un grupo G es localmente casi-convexo, su topología coincide con la topología cociente de la topología casi-convexa asociada a G.

Proposición 4.6.5 *Si H es un subgrupo cerrado de (G, τ) y G/H es localmente casi-convexo, entonces $\tau_{G/H} = (\tau_e)_{G/H}$.*

DEMOSTRACIÓN:

$\subseteq$) $\tau_e \leq \tau \Rightarrow (\tau_e)_{G/H} \leq \tau_{G/H}$

$\supseteq$) Sea $V \in \tau_{G/H}$ un entorno de la clase $[0]$, entonces $p^{-1}(V) \in \tau$. Ya que G/H es localmente casi-convexo, existe un entorno casi-convexo de cero $W \subseteq V$. Luego $p^{-1}(V) \supseteq p^{-1}(W) = Q(p^{-1}(W))$ (Lema 4.1.5) y $V \in (\tau_e)_{G/H}$. □

Teorema 4.6.6 *Sea (G, τ) un grupo topológico de Hausdorff con suficientes caracteres continuos. Si H es un subgrupo compacto de (G, τ) y G/H es localmente casi-convexo, entonces G es localmente casi-convexo.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que $\tau_{|H} = \tau_{e\,|H}$. En general, si H es un subgrupo cerrado de G tenemos que $\tau_{e\,|H}$ es localmente casi-convexa y $\tau_{e\,|H} \leq (\tau_{|H})_e \leq \tau_{|H}$. Si H es localmente casi-convexo, entonces $(\tau_{|H})_e = \tau_{|H}$. Con la hipótesis adicional de H compacto, se obtiene la otra igualdad teniendo en cuenta que la identidad $id\colon (H, \tau_{|H}) \to (H, \tau_{e\,|H})$ es un homeomorfismo.

Por otra parte $\tau_{G/H} = (\tau_e)_{G/H}$ (Proposition 4.6.5).

Así, como τ y τ_e coinciden en el subgrupo H y dan la misma topología cociente en G/H, por [35](Lemma 1), $\tau_e = \tau$. □

En el caso particular de un espacio vectorial topológico tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.6.7 *Sea (E, τ) un espacio vectorial topológico de Hausdorff con suficientes funcionales lineales continuos. Si H es un subespacio finito dimensional de (E, τ) y E/H es localmente casi-convexo, entonces E es localmente casi-convexo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\tau_\omega = \omega(E, E^*)$, la topología débil de E respecto a los funcionales lineales continuos de (E, τ). Aplicando el Lema 4.3.3, (E, τ_ω) es un grupo localmente casi-convexo. Así $\tau_\omega < \tau_e < \tau$. En el subespacio finito dimensional H, la topología débil $\tau_{\omega|H}$ coincide con $\tau_{|H}$. Entonces $\tau_{|H} = \tau_{e\,|H}$. Y el resto de la demostración es análoga a la del Teorema 4.6.6. □

Observación 10 *En el marco de los espacios vectoriales topológicos, la convexidad local no es una propiedad de tres espacios. Existe un espacio vectorial topológico metrizable, separable y completo, no localmente convexo* X *que contiene un subespacio* M *de dimensión 1 tal que* X/M *es linealmente isomorfo a* l_1*, el espacio de Banach de las sucesiones absolutamente sumables de números reales ([50] pag.82 y Theorem 5.13).*

Observación 11 *En el contexto de los grupos topológicos, la "casi-convexidad local" no es tampoco una propiedad de tres espacios, basta considerar el ejemplo de la Observación anterior y aplicar el Lema 4.3.3.*

Cuestión 1 *¿Se verifica el Teorema 4.6.6 para un subgrupo* H *localmente compacto?*

Capítulo 5

Analogías entre espacios vectoriales topológicos y grupos topológicos

Una subclase notable de grupos topológicos abelianos son los espacios vectoriales topológicos. Como dichos espacios han sido muy estudiados en la literatura es natural preguntarse qué propiedades de éstos pueden generalizarse a grupos y qué propiedades no admiten una expresión análoga.

Consideramos a partir de ahora espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. En grupos el objeto dualizante será $\mathbb{T}$ en lugar de $\mathbb{R}$; el papel de las formas lineales (continuas) lo juegan los homomorfismos (continuos) en $\mathbb{T}$.

Damos dos ejemplos de propiedades de espacios vectoriales topológicos que no se traducen directamente a grupos.

1. Si f es una forma lineal continua de un espacio vectorial topológico E, $\ker f$ es un subespacio cerrado propio maximal (de codimensión 1). Sin embargo, si $\chi: G \to \mathbb{T}$ es un homomorfismo continuo de un grupo topológico G, $\ker \chi$ es un subgrupo cerrado que puede no ser maximal, como se desprende tomando $G = \mathbb{T}$ y $\chi(z) = z^n$. Las raices n-ésimas de la unidad, S_n, constituyen el núcleo de χ, y tomando m un múltiplo de n, $S_m \supset S_n$.

2. Si se considera como "grupos análogos" a los espacios vectoriales de dimensión finita, los grupos localmente compactos, tenemos que mientras que toda forma lineal en los primeros es continua, sin embargo, en todo grupo localmente compacto no discreto existen caracteres continuos y otros no continuos ([46]).

Veamos la relación entre el espacio vectorial de las formas lineales, $Lin(E,\mathbb{R})$, de un espacio vectorial topológico E, y el grupo de caracteres $Hom(E,\mathbb{T})$. El paso de unas a otros es algo natural teniendo en cuenta que $\mathbb{R}$ es la cubierta universal de $\mathbb{T}$. Es decir, si designamos por $\rho\colon\mathbb{R}\to\mathbb{T}$ la proyección recubridora, a toda forma lineal f le corresponde el carácter ρf. Designaremos por $T_E\colon Lin(E,\mathbb{R})\to Hom(E,\mathbb{T})$ a la aplicación definida por $T_E(f)=\rho f=exp(2\pi i f)$.

Lema 5.0.1 *La aplicación T_E es un homomorfismo de grupos, inyectivo y $\varphi\in Im(T_E)$ si y sólo si $\varphi_{|L}$ es continuo para todo subespacio $L\subset E$ de dimensión 1.*

DEMOSTRACIÓN: Está claro que T_E es un monomorfismo de grupos, veamos la última afirmación.
Sea $\varphi=T_E(f)$ para algún $f\in Lin(E,\mathbb{R})$. Si $L\subset E$ es un subespacio de dimensión 1, $f_{|L}$ es continuo y $\varphi_{|L}$ es también continuo.
Recíprocamente, sea $\varphi\in Hom(E,\mathbb{T})$ y sea $a\in E$. Denotaremos por $[a]$ el subespacio generado por a. Ya que $\varphi_{|[a]}$ es continuo, existe un número real r_a tal que $\varphi_{|[a]}(x)=e^{2\pi i r_a x}$. Definimos $f\colon E\to\mathbb{R}$ por superposición de todas las aplicaciones definidas en los subespacios de dimensión 1. Claramente $f(\lambda a)=\lambda f(a)$. Veamos que $f(a)+f(b)=f(a+b)$. Para todo $a,b\in E$, $\varphi(a)\varphi(b)=\varphi(a+b)\Rightarrow f(a)+f(b)-f(a+b)\in\mathbb{Z}$. Entonces, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda(f(a)+f(b)-f(a+b))=f(\lambda a)+f(\lambda b)-f(\lambda(a+b))\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow f(a)+f(b)-f(a+b)=0$. □

Así también, un espacio vectorial topológico E admite dos duales estándar, como espacio vectorial y como grupo. El primero, $E^*=CLin(E,\mathbb{R})$, consta de todas las formas lineales continuas y el segundo, $\Gamma E=CHom(E,\mathbb{T})$, de los caracteres continuos. El paso de unas a otros es algo natural teniendo en cuenta que $\mathbb{R}$ es la cubierta universal de $\mathbb{T}$. A toda forma lineal continua $f\in E^*$ le corresponde el carácter continuo ρf y recíprocamente.

Corolario 5.0.2 *La aplicación $T_E\colon E^*\to\Gamma E$ es un isomorfismo algebraico de grupos.*

La topología débil de E, $\omega(E,E^*)$, es la topología en E generada por E^*. Si $E^*\neq\{0\}$, $\omega(E,E^*)$ es más fina que la topología de Bohr $\omega(E,\Gamma E)$, no coincidiendo con ella ni siquiera para el caso $E=\mathbb{R}$. En efecto, $(\mathbb{R},\omega(\mathbb{R},\Gamma\mathbb{R}))$ es un grupo totalmente acotado, mientras que $(\mathbb{R},\omega(\mathbb{R},\mathbb{R}^*))$ coincide con $\mathbb{R}$ dotado de la topología usual.

Constatamos a continuación las relaciones que existen entre los polares de subconjuntos de espacios vectoriales, considerados en el espacio vectorial y en el grupo.

Sean $A \subset E$ y $B \subset E^*$ dos subconjuntos no vacíos. Denotaremos los polares por:

$$A^{\triangleright} := \{f \in E^* : |f(x)| \leq 1, \forall x \in A\}$$

$$B^{\triangleleft} := \{x \in E : |f(x)| \leq 1, \forall f \in B\}$$

Usamos esta notación, poco corriente, puesto que queremos establecer la distinción entre los conjuntos polares definidos en espacios vectoriales y los definidos en grupos.

Un subconjunto A de un espacio vectorial E se dice que es *equilibrado* si $tA \subset A$ para todo $t \in R$ con $|t| \leq 1$. Los subconjuntos $A^{\triangleright}$ y $B^{\triangleleft}$ son equilibrados y convexos.

Denotaremos por $\mathrm{e}(A)$ a la envoltura equilibrada y por $\mathrm{co}(A)$ a la envoltura convexa.

$$\mathrm{e}(A) = \{\lambda x \mid x \in A, |\lambda| \leq 1\}$$

$$\mathrm{co}(A) = \{\sum \alpha_i x_i \mid x_i \in A, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1\}$$

La envoltura convexa y equilibrada de A es:

$$\mathrm{co}(\mathrm{e}(A)) = \{\sum \alpha_i x_i \mid x_i \in A, \sum |\alpha_i| \leq 1\}$$

Observemos que $\mathrm{co}(\mathrm{e}(A)) \neq \mathrm{e}(\mathrm{co}(A))$ y que la envoltura convexa de un subconjunto equilibrado es equilibrada.

En lo que sigue utilizaremos el Teorema bipolar que, como es sabido, es consecuencia del Teorema de Hahn-Banach: Para cualquier subconjunto A de un espacio localmente convexo E, el bipolar $(A^{\triangleright})^{\triangleleft}$ es la envoltura $\omega(E, E^*)$-cerrada, convexa y equilibrada de $A \cup \{0\}$. De él se obtienen las siguientes relaciones entre los polares de un subconjunto de un espacio vectorial topológico, considerando éste como grupo o como espacio vectorial.

Proposición 5.0.3 *([30] Proposición 1.11)*
Sea E un espacio vectorial topológico y sean $A \subset E$ y $B \subset E^*$ subconjuntos no vacíos, entonces:

a) $T_E((4A)^{\triangleright}) \subseteq A^{\circ}$

b) $(4B)^{\triangleleft} \subseteq {}^{\circ}(T_E(B))$

c) $(A^{\triangleright})^{\triangleleft} \supseteq {}^{\circ}(A^{\circ})$

d) $({}^{\circ}(T_E(B)))^{\circ} \subseteq T_E((B^{\triangleleft})^{\triangleright})$.

Además, si A es equilibrado, se verifica la igualdad en a) y c) y, si B es equilibrado, se verifica la igualdad en b) y d).

5.1 Espacios vectoriales localmente convexos

Un aspecto que conviene tener en cuenta para nuestro estudio posterior es la distinción entre lo que se suele llamar en la literatura espacio vectorial reflexivo y lo que es para nosotros un espacio vectorial reflexivo en sentido Pontryagin que especificaremos más adelante.

Un espacio vectorial topológico reflexivo es localmente convexo. Como es sabido la topología de un espacio localmente convexo viene definida como la topología de la convergencia uniforme en una familia adecuada, $\mathfrak{S}$, de subconjuntos del dual o del predual ([78]).

Entre las topologías localmente convexas más destacadas de E^* se suelen estudiar:

1. la topología de la convergencia uniforme en la familia $\mathfrak{S}$ de los conjuntos finitos de E, $\omega(E^*, E)$ o *topología de la convergencia puntual*,

2. la de la convergencia uniforme en la familia $\mathfrak{S}$ de los compactos de E, que coincide con la *topología compacto-abierta*,

3. la topología de la convergencia uniforme en la familia $\mathfrak{S}$ de los subconjuntos absolutamente convexos, débilmente compactos de E, que suele denominarse la *topología de Mackey*,

4. la topología de la convergencia uniforme en la familia $\mathfrak{S}$ de los acotados de E o *topología fuerte*.

Al espacio E^* dotado de estas topologías lo denominaremos respectivamente E^*_ω, E^*_{co}, E^*_τ, y E^*_b. Y, siguiendo la literatura, llamaremos en general $E^*_{\mathfrak{S}}$ al dual de un espacio vectorial topológico E, dotado de la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos S de una familia $\mathfrak{S}$ de subconjuntos de E ([78]).

Al hablar de reflexividad en la teoría de espacios vectoriales, la topología considerada en el dual y en el bidual es la topología de la convergencia uniforme en los acotados. Es decir, un espacio localmente convexo E es *reflexivo* si la aplicación canónica $j_E\colon E \to (E_b^*)_b^*$ es un isomorfismo topológico. Sin embargo, por las razones que exponíamos en la introducción del Capítulo 3, al considerar un espacio vectorial en su estructura aditiva, la topología que destacamos en el dual es la topología compacto-abierta. Así, diremos que un espacio E es *reflexivo en el sentido Pontryagin* si $J_E\colon E \to (E_{co}^*)_{co}^*$ es un isomorfismo topológico. Esta definición es equivalente a decir que E considerado como grupo topológico es reflexivo, como se deduce del siguiente resultado:

Proposición 5.1.1 *([80], [8])*
La aplicación $T_E\colon E^* \to \Gamma E$ definida por $T_E(\varphi) = \rho\varphi$ es un isomorfismo topológico, si E^* y ΓE están dotados de las respectivas topologías compacto-abiertas.

La Proposición 5.1.1 no se verifica para todas las topologías definidas por convergencia uniforme en familias de conjuntos de E. Por ejemplo, si $\mathfrak{S}$ es la familia de todos los subconjuntos finitos de E, las $\mathfrak{S}$-topologías en E^* y en ΓE que podemos denominar débil, $\omega(E^*, E)$ y $\omega(\Gamma E, E)$, en E^* y en ΓE respectivamente, nos dan una aplicación $T_E\colon E_\omega^* \to \Gamma_\omega E$ que es continua y no es abierta.

Lema 5.1.2 *Sea (E, τ) un espacio localmente convexo y $\mathfrak{S}$ una familia de conjuntos acotados, convexos, cerrados y equilibrados, recubriendo E tal que $\{0\} \notin \mathfrak{S}$.*

i) Si $\chi : E \to \mathbb{T}$ es un carácter con restricción continua en cada $S \in \mathfrak{S}$, entonces $\chi_{|L}$ es continuo para todo subespacio vectorial $L \subset E$ de dimensión 1.

ii) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo carácter con restricción continua en cada $S \in \mathfrak{S}$, es continuo.

(b) Toda forma lineal con restricción continua en cada $S \in \mathfrak{S}$, es continua.

Demostración:

i) Sea $\chi : E \to \mathbb{T}$ un carácter con restricción continua en cada $S \in \mathfrak{S}$ y sea $L \subset E$ un subespacio de dimensión 1. Por ser $\chi_{|L}$ un carácter, basta demostrar que es continuo en el 0. Para $S \in \mathfrak{S}$, $\chi_{|L\cap S} = (\chi_{|S})_{|L\cap S}$ es continuo. Entonces, $\forall \epsilon > 0$, existe un entorno equilibrado de 0 en L, $U \subset L \cap S$, tal que $|\chi_{|L\cap S}(x) - 1| < \epsilon$, para todo $x \in U$. Así también $|\chi_{|L}(x) - 1| < \epsilon$, para todo $x \in U$.

ii)

$(a) \Rightarrow (b)$ Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una forma lineal continua en cada $S \in \mathfrak{S}$, entonces el carácter $\chi = exp(2\pi i f)$ es continuo en cada $S \in \mathfrak{S}$, Por (a), χ es continuo y entonces la forma lineal f es continua por ser la elevación de un carácter continuo.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea $\chi : E \to \mathbb{T}$ un carácter con restricción continua en cada $S \in \mathfrak{S}$. Por i), la restricción de χ a subespacios uno dimensionales es continua y, por el Lema 5.0.1, existe una forma lineal $f : E \to \mathbb{R}$ tal que $exp(2\pi i f) = \chi$. Veamos que f es continua:

Para todo $S \in \mathfrak{S}$ y para todo $\epsilon > 0$, existe un entorno equilibrado de 0 tal que $|exp(2\pi i f(x)) - 1| < \epsilon/2$ para todo $x \in S \cap U$. Entonces $|exp(2\pi i t f(x)) - 1| < \epsilon/2$, para todo $|t| \leq 1$, y por tanto $|f(x)| < \epsilon$. Así, la restricción de f a cada elemento de $\mathfrak{S}$ es continua y, por (b), f es continua en E. Entonces $exp(2\pi i f) = \chi$ es continuo. □

5.2 Elevación de caracteres de un grupo

Sea G un grupo topológico, consideramos el grupo de caracteres reales continuos, $CHom(G, \mathbb{R})$, y nos planteamos cuando la aplicación $T_G: CHom(G, \mathbb{R}) \to \Gamma G$ es biyectiva, i.e. cuando los caracteres continuos de G se pueden elevar a caracteres reales continuos.

Para este estudio nos hemos basado en el siguiente resultado de Nickolas ([67]):

Si G es un k-espacio, entonces la componente conexa por caminos de la identidad en $G^\wedge$ es la unión de todos los subgrupos uniparamétricos de $G^\wedge$. (∗∗)

Por subgrupo uniparamétrico de G se entiende la imagen de $\mathbb{R}$ por un homomorfismo continuo de $\mathbb{R}$ en G.

Hemos visto que todo carácter continuo de un espacio vectorial topológico se eleva de forma única a una forma lineal continua (Corolario 5.0.2). Demostraremos ahora que en grupos tenemos una propiedad equivalente si el grupo y su dual cumplen ciertas condiciones.

Las dos Proposiciones siguientes están esencialmente en la demostración de (**) como se encuentra en [67], las damos aquí con detalle y enunciadas convenientemente para su aplicación posterior.

Proposición 5.2.1 *Sea G un grupo topológico tal que G es un k-espacio y su dual $G^\wedge$ es conexo por caminos. Entonces todo homomorfismo continuo $\varphi: G \to \mathbb{T}$ se eleva a un homomorfismo continuo $\tilde{\varphi}: G \to \mathbb{R}$ tal que $\rho\tilde{\varphi} = \varphi$, siendo $\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ la proyección recubridora.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\varphi: G \to \mathbb{T}$ un carácter continuo. Definimos un camino en $G^\wedge$ que una el homomorfismo nulo ν_0 y φ, es decir, sea $f: [0,1] \to G^\wedge$ una aplicación continua tal que $f(0) = \nu_0$ y $f(1) = \varphi$. Entonces f induce una homotopía

$$\begin{array}{llll} F: & [0,1] \times G & \to & \mathbb{T} \\ & (t,g) & \to & f_t(g) := (f(t))(g) \end{array}.$$

Claramente F es una aplicación bien definida, siendo $f_0(g) = 1 \in \mathbb{T}$ y $f_1(g) = \varphi(g)$, para todo $g \in G$. Para ver la continuidad de F, basta demostrar que $F_{|[0,1]\times K}$ es continua para todo subconjunto compacto $K \subset G$, ya que, por ser G un k-espacio, también lo es $[0,1] \times G$. Sea $\{(t_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$ una red en $[0,1] \times K$, convergente a (t,g). Por ser f continua y $t_\alpha \to t$, f_{t_α} es τ_{co}-convergente a f_t, que es también un carácter continuo. Hay que ver que $f_{t_\alpha}(g_\alpha) \to f_t(g)$. Sea W un entorno cerrado de 1 en $\mathbb{T}$. Por una parte $g_\alpha \to g \Rightarrow f_t(g_\alpha) \to f_t(g)$ y podemos encontrar $\alpha_0 \in A$ tal que $f_t(g_\alpha) \in f_t(g)W$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Así, $S := \overline{\{g_\alpha : \alpha \geq \alpha_0\}} \subset K$ es compacto y $f_t \in (S, f_t(g)W)$. Por otra parte, $f_{t_\alpha} \overset{\tau_{co}}{\to} f_t$ implica que existe α_1 de A tal que $f_{t_\alpha} \in (S, f_t(g)W)$ para todo $\alpha \geq \alpha_1$. Luego $f_{t_\alpha}(g_\alpha) \in f_t(g)W$ para todo $\alpha \geq \alpha_0, \alpha_1$.

Denotamos por $\psi: \{0\} \times G \to \mathbb{R}$ el carácter real nulo en $\{0\} \times G$. Por ser ρ la proyección recubridora, existe una homotopía H que hace commutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \{0\} \times G & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R} \\ \downarrow & H\nearrow & \downarrow\rho \\ [0,1] \times G & \xrightarrow{F} & \mathbb{T} \end{array}$$

i.e. $\rho H = F$ y $H_{|\{0\}\times G} = \psi$ ([81] Chap.2 sect.2 Th.3).

Veamos ahora que para cada $s \in [0,1]$, $H_{|\{s\}\times G}$ es un homomorfismo. Sean $g_1, g_2 \in G$, definimos una aplicación $\tilde{\sigma}: [0,1] \to \mathbb{R}$ mediante la formula $\tilde{\sigma}(s) = H(s,g_1) + H(s,g_2) - H(s, g_1 + g_2)$. Claramente $\tilde{\sigma}$ es una aplicación continua que es una elevación de la aplicación continua $\sigma: [0,1] \to \mathbb{T}$ definida por $\sigma(s) = F(s,g_1)F(s,g_2)F(s,g_1+g_2)^{-1}$. Pero $F(s,g) = f_s(g)$, $\forall g \in G$, y $f_s \in G^\wedge$ es un homomorfismo, entonces $\sigma(s) = 1 \in \mathbb{T}$ para todo $s \in [0,1]$. Luego, $\tilde{\sigma}$ es una elevación del camino constante $\begin{array}{cccc} e_0\colon & [0,1] & \to & \mathbb{T} \\ & s & \to & 1 \end{array}$. El camino constante a cero $\begin{array}{cccc} h_0\colon & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & s & \to & 0 \end{array}$ es también una elevación de σ con el mismo origen que h_0 ya que $\tilde{\sigma}(0) = H(0,g_1)+H(0,g_2)-H(0,g_1+g_2) = \psi(0,g_1)+\psi(0,g_2)-\psi(0,g_1+g_2) = 0 = h_0(0)$. Finalmente, por la propiedad de ρ de unicidad de elevaciones ([81] Chap.2 sect.2 Th.5), obtenemos $0 = h_0(s) = \tilde{\sigma}(s) = H(s,g_1) + H(s,g_2) - H(s,g_1+g_2)$, $\forall s \in [0,1]$.

Ahora podemos definir una elevación de φ, $\tilde{\varphi}\colon G \to \mathbb{R}$, por $\tilde{\varphi}(g) = H(1,g)$. $\square$

Observación 12 *Para el grupo subyacente a un espacio vectorial topológico, la propiedad de elevación de caracteres continuos de la Proposition 5.2.1 se puede demostrar mediante el isomorfismo entre $E^\wedge$ y E^*_{co}, ya mencionado. Esto nos dice que la hipótesis de que G sea k-espacio en la Proposición anterior, no es una condición necesaria, ya que existen espacios localmente convexos que no son k-espacios (cfr. [5] Corollary 8.12).*

Era conocido por Dixmier (see [48] pp.393) que, para un grupo localmente compacto G, la condición de que todo carácter continuo en G se pueda elevar a un carácter real continuo es equivalente a que su dual $G^\wedge$ sea la unión de sus subgrupos uniparamétricos.

Proposición 5.2.2 *Si un grupo topológico G verifica que todo homomorfismo continuo de G en $\mathbb{T}$ se puede elevar a un homomorfismo continuo de G en $\mathbb{R}$, entonces $G^\wedge$ es la unión de sus subgrupos uniparamétricos. Además $G^\wedge$ es divisible.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\varphi \in G^\wedge$. Denotamos por $\tilde{\varphi}\colon G \to \mathbb{R}$ al homomorfismo continuo tal que $\rho\tilde{\varphi} = \varphi$. Definimos $\psi\colon \mathbb{R} \to CHom(G,\mathbb{R})$ por $\psi(r) = r\tilde{\varphi}\colon g \to r \cdot (\tilde{\varphi}(g))$, $\forall r \in \mathbb{R}$. Claramente ψ es un homomorfismo continuo. Si $T_G\colon CHom(G,\mathbb{R}) \to CHom(G,\mathbb{T}) = G^\wedge$ denota la aplicación exponencial, $T_G\psi \in CHom(\mathbb{R}, G^\wedge)$ verifica $(T_G\psi)(1) = \rho\tilde{\varphi} = \varphi$. Así, $\varphi \in T_G\psi(\mathbb{R})$ y esto significa que $G^\wedge$ es la unión de sus subgrupos uniparamétricos.

Para probar la última afirmación, supongamos $G^\wedge = \bigcup\{\xi(\mathbb{R}) : \xi \in CHom(\mathbb{R}, G^\wedge)\}$, y sean $\varphi \in G^\wedge$ y $n \in \mathbb{N}$. Existe $\xi \in CHom(\mathbb{R}, G^\wedge)$ y $r \in \mathbb{R}$, tal que $\xi(r) = \varphi$. El carácter $\xi\left(\frac{r}{n}\right)$ verifica $n\xi\left(\frac{r}{n}\right) = \varphi$. $\square$

Observación 13 *Un grupo topológico que sea la unión de sus subgrupos uniparámetricos debe ser conexo por caminos. Así pues, en la Proposición 5.2.1, la conexión por caminos de $G^\wedge$ no se puede eliminar.*

Usando ahora estos resultados tenemos:

Teorema 5.2.3 *Si G es un grupo topológico, metrizable, reflexivo y conexo por caminos, entonces:*

a) Todo carácter continuo $\varphi: G^\wedge \to \mathbb{T}$ se eleva a un carácter continuo real (i.e. $\exists \tilde{\varphi}: G^\wedge \to \mathbb{R}$ tal que $\rho\tilde{\varphi} = \varphi$)

b) Existe una biyección entre los conjuntos $CHom(G^\wedge, \mathbb{T})$ y $CHom(G^\wedge, \mathbb{R})$

c) G es la unión de sus subgrupos uniparamétricos

d) G es divisible

DEMOSTRACIÓN:

a) Si G es metrizable, $G^\wedge$ es un k-espacio ([28]). Por ser G reflexivo, $(G^\wedge)^\wedge$ es topológicamente isomorfo a G y, por tanto, conexo por caminos. Aplicando la Proposición 5.2.1, todo carácter continuo $\varphi: G^\wedge \to \mathbb{T}$ se puede elevar a un carácter real continuo $\tilde{\varphi}: G^\wedge \to \mathbb{R}$ tal que $\rho\tilde{\varphi} = \varphi$.

b) Por tener la proyección recubridora la propiedad de unicidad de elevación de caminos ([81] pp.69, 2nd. paragrph), toda elevación $\tilde{\tilde{\varphi}}$ de $\varphi \in CHom(G^\wedge, \mathbb{T})$, tal que $\tilde{\tilde{\varphi}}(\nu_0) = 0 \in \mathbb{R}$ debe coincidir con $\tilde{\varphi}$. Entonces, la correspondencia $\varphi \to \tilde{\varphi}$ es una aplicación inyectiva (si $\varphi, \xi \in G^\wedge$ verifican $\varphi \neq \xi$ también $\tilde{\varphi} \neq \tilde{\xi}$). Y además, todo carácter real continuo $h: G^\wedge \to \mathbb{R}$ es la elevación de $\rho h \in G^\wedge$.

c) Aplicamos la Proposición 5.2.2, teniendo en cuenta que se verifica a) y que G es topológicamente isomorfo a $G^{\wedge\wedge}$.

d) G es divisible por ser la unión de sus subgrupos uniparamétricos (Proposición 5.2.2).

□

Como consecuencia de este Teorema se obtiene la no reflexividad del grupo $L^2_{\mathbb{Z}}[0, 1]$.

Sea $L^2[0,1]$ el espacio vectorial de las clases de funciones reales medibles f tal que $\| f \| := (\int_0^1 |f(t)|^2 dt)^{1/2} < \infty$. El espacio $L^2[0,1]$, dotado de la norma $\| \ \|$ es un espacio de Hilbert. Consideramos ahora $L^2_{\mathbb{Z}}[0,1]$ el subconjunto de las clases de funciones de $L^2[0,1]$ que toman valores enteros. Evidentemente, es un grupo respecto a la suma puntual pero no es subespacio vectorial. Como subespacio topológico de $L^2[0,1]$ es un grupo metrizable, localmente casi-convexo.

Proposición 5.2.4 *El grupo $G = L^2_{\mathbb{Z}}[0,1]$ no es Pontryagin reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN: La demostración se sigue de que G es contráctil y, por tanto, conexo por caminos. Por ser G un grupo metrizable, si fuese reflexivo, podríamos aplicar el Teorema 5.2.3, y entonces G sería divisible. Pero esto no es así; si consideramos la función f constante a 1, no existe $g \in L^2_{\mathbb{Z}}[0,1]$ tal que $2g = f$.

Para ver que $L^2_{\mathbb{Z}}[0,1]$ es contráctil consideramos la función característica de $[0,l)$ en $[0,1]$, $\chi_{[0,l)}$, y la aplicación $\begin{array}{cccc} F & : & L^2_{\mathbb{Z}}[0,1] \times [0,1] & \to & L^2_{\mathbb{Z}}[0,1] \\ & & (f,t) & \to & \chi_{[0,1-t)} \cdot f \end{array}$ que establece una homotopía entre la identidad en $L^2_{\mathbb{Z}}[0,1]$ y la aplicación constante nula. Entonces, F es una contracción de $L^2_{\mathbb{Z}}[0,1]$. $\square$

Este resultado fue obtenido independientemente por L.Au*ß*enhofer en [5], donde calcula el dual de $L^2_{\mathbb{Z}}[0,1]$ que es precisamente $L^2[0,1]$, que a su vez es un grupo autodual, llegando así a la conclusión de que α_G no es sobre.

5.3 Espacios vectoriales de convergencia

Es quizás en el contexto de los espacios vectoriales donde más aplicaciones tiene la estructura de convergencia, y de donde han surgido las motivaciones para nuestro estudio del tema. La expresión tan simple de que un espacio vectorial topológico es "reflexivo" (en un sentido que especificaremos más adelante) si y sólo si es localmente convexo y completo [24], es especialmente sugerente.

En este apartado damos primero una síntesis de resultados conocidos, en los que se apoyan nuestras aportaciones posteriores.

Si E es un espacio vectorial de convergencia, se suele designar por $\mathcal{L}E$ al conjunto de las formas lineales continuas respecto a las estructuras de convergencia de E y $\mathbb{R}$. Si E es topológico, $E^* = \mathcal{L}E$ y usaremos indistintamente las dos notaciones.

Se define el *dual de convergencia* $\mathcal{L}_c E$ de un espacio vectorial topológico (o de un espacio vectorial de convergencia) E, como el conjunto de las formas lineales continuas, $\mathcal{L}E$, dotado de la estructura de convergencia continua. Análogamente el bidual de convergencia es $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E = \mathcal{L}_c(\mathcal{L}_c E)$.

Proposición 5.3.1 *Si E es espacio vectorial topológico, entonces $\mathcal{L}_c E$ es localmente compacto y $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ es topológico.*

DEMOSTRACIÓN: Estas afirmaciones son resultados de Schröder. La primera está probada en [24] Satz 2 y la segunda en [17]. □

Según comprueba Kutzler [60], en los espacios vectoriales de dimensión finita coinciden todas las estructuras de convergencia -así cómo todas las topologías- compatibles con la estructura lineal.

Es natural afirmar que un espacio vectorial de convergencia E es reflexivo si la inmersión canónica $J'_E\colon E \to \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ es isomorfismo de estructuras. En [25], Butzmann denomina $\mathcal{C}$-reflexivos a los espacios que verifican la citada condición, y comprueba que un espacio vectorial de convergencia E es $\mathcal{C}$-reflexivo si y sólo si, considerado como grupo (es decir, prescindiendo de la linealidad) es BB-reflexivo, tal como lo hemos definido en el Capítulo 3.

En realidad ese resultado guarda una perfecta analogía con el caso en que E es un espacio vectorial topológico, y en $E^* = \mathcal{L}E$ se considera la topología compacto-abierta y asimismo en el bidual. El espacio $(E^*_{co})^*_{co}$ es topológicamente isomorfo como grupo a $E^{\wedge\wedge}$, es decir al bidual de E considerado como grupo (cfr. Proposición 5.1.1). Este hecho se prueba en el trabajo de Smith [80], haciendo mención a su vez a resultados de Arens.

En conclusión, para un espacio vectorial (topológico o de convergencia) E podemos considerar dos duales de convergencia, como grupo y como espacio vectorial, $\Gamma_c E$ y $\mathcal{L}_c E$, formados por caracteres continuos y por formas lineales continuas, respectivamente, y dotados de la correspondiente estructura de convergencia continua. A continuación damos un Lema que establece la relación entre ambos duales.

Lema 5.3.2 *([25])*
Sea E un espacio vectorial de convergencia. Si $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ designa la proyección recubridora, definida por $\rho(r) = e^{2\pi i r}$, la aplicación $T_E\colon \mathcal{L}_c E \to \Gamma_c E$ definida por $T_E(\varphi) = \rho\varphi$ es un isomorfismo de grupos de convergencia.

La topología asociada a la estructura de convergencia continua, τ_{Λ_c}, definida y estudiada en el Capítulo 2, nos va a permitir obtener propiedades relacionadas con la completitud. Aunque ya Butzmann había obtenido que $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_cE$ es la compleción de E en el caso en que E sea un espacio vectorial topológico, no menciona que este hecho deriva precisamente de la estructura de k-espacio de $(\mathcal{L}_cE, \tau_{\Lambda_c})$.

Vamos a probar que para los espacios vectoriales topológicos, la topología τ_{Λ_c} coincide con la "equicontinuous weak*", también llamada en la literatura "almost weak*", que se define para espacios vectoriales localmente convexos.

Sea E un espacio localmente convexo. En E^* consideramos la topología más fina de todas aquéllas que coinciden con la débil $\omega(E^*, E)$, en los equicontinuos. Dicha topología se denomina la *equicontinuous weak** (ew*). Es invariante por traslaciones y tiene una base de entornos de cero equilibrados y convexos, pero no se verifica en general la continuidad de la suma ([78] IV,6.2). Por tanto no es una topología de espacio vectorial topológico. Si para algún espacio E se da la continuidad de la suma, automáticamente es localmente convexa. Esto sucede por ejemplo, para un espacio metrizable localmente convexo E, como afirma el teorema de Banach-Dieudonné ([78] IV,6.3). En ese caso la topología ew* coincide con la topología de la convergencia uniforme en los precompactos de E.

Aunque la topología ew* se define en la literatura para los duales de espacios localmente convexos, tiene sentido definirla también para duales de espacios vectoriales topológicos y tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.3.3 *Sea E un espacio vectorial topológico. La topología ew* en $\mathcal{L}E$ coincide con la topología asociada a la estructura de convergencia continua.*

DEMOSTRACIÓN: La demostración se sigue de los Lemas 5.3.5, 5.3.6 y 5.3.7 que damos a continuación. □

Lema 5.3.4 *Para cada espacio vectorial topológico E, la topología asociada a la estructura de convergencia continua, τ_{Λ_c}, es de Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia inmediata de que la topología compacto-abierta en $\mathcal{L}E$ es de Hausdorff y es menos fina que τ_{Λ_c}. □

Lema 5.3.5 *Sea E un espacio vectorial topológico, $(\mathcal{L}E, \tau_{\Lambda_c})$ es k-espacio topológico.*

DEMOSTRACIÓN: Tener en cuenta las Proposiciones 5.3.1, 5.3.4 y 1.5.4. □

Por otra parte tenemos:

Lema 5.3.6 *Sea $K \subset \mathcal{L}E$ un conjunto τ_{co}-cerrado. Entonces K es equicontinuo si y sólo si es Λ_c-compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Es totalmente análoga a 3.1.8. □

Lema 5.3.7 *Sea E un espacio vectorial topológico. Si $H \subset \mathcal{L}E$ es equicontinuo, en H coinciden las siguientes estructuras de convergencia:*

1. *la asociada a la topología compacto-abierta*
2. *la de la convergencia continua, Λ_c*
3. *la asociada a la topología τ_{Λ_c}*
4. *la asociada a la topología débil $\omega(E^*, E)$.*

DEMOSTRACIÓN: Siempre se cumple $\xrightarrow{\Lambda_c} \Rightarrow \xrightarrow{\tau_{\Lambda_c}} \Rightarrow \xrightarrow{\tau_{co}} \Rightarrow \xrightarrow{\omega(E^*,E)}$.
Por tanto, sólo tenemos que ver que toda red $(\xi_\alpha)_{\alpha \in A} \subset H$ que es $\omega(E^*, E)$-convergente a 0, también es Λ_c-convergente a 0.
Tomamos $(x_\beta)_{\beta \in B} \subset E$ convergente a x. Por ser H equicontinuo, para todo $W \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(0)$ existe $V \in \mathcal{B}_E(0)$ tal que $\xi_\alpha(V) \subset W$, $\forall \alpha \in A$. Como $x_\beta - x$ converge a 0, existe $\beta_0 \in B$ tal que $x_\beta - x \in V$, $\forall \beta \geq \beta_0$. Por tanto, $\xi_\alpha(x_\beta - x) \in W$, $\forall \alpha \in A$ y para todo β posterior a cierto $\beta_0 \in B$. De ahí deducimos que $\xi_\alpha(x_\beta) \to 0$. □

Anteriormente comentamos que la topología τ_{Λ_c} no es localmente convexa en general. Queremos estudiar si está muy lejos de serlo. Sabemos que para una topología ν definida en un espacio vectorial tiene sentido considerar la topología localmente convexa más fina entre las menos finas que ν (*modificación localmente convexa* de ν) y que, como toda topología localmente convexa, puede definirse a través de una familia de seminormas. En el caso de un espacio vectorial de convergencia procedemos igualmente, como explicamos a continuación, y veremos que si τ_{Λ_c} es localmente convexa coincide precisamente con la modificación localmente convexa de Λ_c.

Sea (E, Ξ) un espacio vectorial de convergencia y $\mathcal{P}$ la familia de seminormas continuas definidas en E. Para cada $p \in \mathcal{P}$ y cada entero positivo n, sea $V(p,n) := \{x : p(x) < \frac{1}{n}\}$ y $\mathcal{B}$ la colección de intersecciones finitas de conjuntos $V(n,p)$. Entonces, si $\mathcal{P}$ separa puntos, $\mathcal{B}$ es una base de entornos de cero equilibrados, convexos y absorbentes, para una topología localmente convexa de Hausdorff en E, que denominaremos *modificación localmente convexa* de E ([76] 1.37).

Proposición 5.3.8 *Un espacio vectorial de convergencia E y su modificación localmente convexa admiten el mismo dual, $\mathcal{L}E$.*

DEMOSTRACIÓN: [38] Satz 11. □

La modificación localmente convexa τ_l de un espacio vectorial de convergencia (E, Ξ), es la topología localmente convexa más fina de todas las menos finas que la estructura Ξ, es decir, se verifica $x_\alpha \xrightarrow{\Xi} x \Rightarrow x_\alpha \xrightarrow{\tau_l} x \Rightarrow x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$, para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ en E y para toda topología τ localmente convexa menos fina que Ξ.

Nos centraremos de nuevo ahora en el espacio dual $\mathcal{L}E$ con la estructura de la convergencia continua Λ_c. Llamaremos $\mathcal{L}_l E$ al espacio $\mathcal{L}E$ dotado de la modificación localmente convexa de Λ_c. En general $\tau_{\Lambda_c} \geq \tau_l$, i.e. $\xrightarrow{\Lambda_c} \;\Rightarrow\; \xrightarrow{\tau_{\Lambda_c}} \;\Rightarrow\; \xrightarrow{\tau_l}$, y si τ_{Λ_c} es localmente convexa, coincide con τ_l. Sin embargo, en contra de lo que afirma Beattie en [14], la modificación localmente convexa de $\mathcal{L}_c E$ no es en general la topología compacto-abierta. Damos a continuación un ejemplo que lo demuestra.

Ejemplo 5.3.9 *Sea E el espacio de Komura definido en [57] §5. E es localmente convexo, reflexivo en sentido habitual (i.e. E es topológicamente isomorfo a $(E_b^*)_b^*$), no completo y tal que $\mathcal{L}_l E \neq \mathcal{L}_{co} E$.*

DEMOSTRACIÓN: Las primeras afirmaciones sobre dicho espacio están probadas en el trabajo citado [57]. Vamos a probar que $\mathcal{L}_l E \neq \mathcal{L}_{co} E$, viendo precisamente que $\mathcal{L}\mathcal{L}_l E \neq \mathcal{L}\mathcal{L}_{co} E$.

Por [80] sabemos que, siendo E reflexivo en sentido ordinario, la inmersión canónica $J_E \colon E \to \mathcal{L}_{co}\mathcal{L}_{co} E$ es isomorfismo topológico.

Por otra parte E no es completo. Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ es la compleción de E ([24]) la inmersión canónica $J'_E \colon E \to \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ no puede ser isomorfismo topológico.

Sin embargo, los conjuntos soporte de $\mathcal{L}_c E$ y $\mathcal{L}_{co} E$ coinciden. Y sus compactos también, ya que J_E es continua y esto hace que los Λ_c-compactos sean precisamente los equicontinuos τ_{co}-cerrados.

Además, $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_cE$ es topológico y tiene la topología compacto-abierta respecto a los compactos de $\mathcal{L}_cE$. Por tanto, $\mathcal{L}\mathcal{L}_{co}E \neq \mathcal{L}\mathcal{L}_cE$. De lo contrario también coincidirían los espacios $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_cE$ y $\mathcal{L}_{co}\mathcal{L}_{co}E$, pero el segundo es isomorfo a E mediante la inmersión canónica, mientras que el primero no lo es.

Por la Proposición 5.3.8, $\mathcal{L}\mathcal{L}_lE = \mathcal{L}\mathcal{L}_cE$, y en consecuencia $\mathcal{L}\mathcal{L}_lE \neq \mathcal{L}\mathcal{L}_{co}E$, por lo que la modificación localmente convexa de $\mathcal{L}_cE$ no es $\mathcal{L}_{co}E$. □

Observación 14 *Por [24] sabemos que la modificación localmente convexa de $C_c(X)$ es precisamente $C_{co}(X)$ bajo condiciones muy generales en X (X c-sumergible), que en particular verifica cualquier espacio vectorial topológico. Así para el espacio de Komura E tenemos $\mathcal{L}C_{co}(E) = \mathcal{L}C_c(E)$, lo que contrasta con el hecho $\mathcal{L}\mathcal{L}_{co}E \neq \mathcal{L}\mathcal{L}_cE$ que acabamos de demostrar. Se destaca así la distinción entre los conjuntos de formas lineales continuas y de aplicaciones continuas.*

Proposición 5.3.10 *Sea $C_c(E)$ el espacio de las funciones reales continuas definidas en el espacio de Komura E, dotado de la estructura de convergencia continua. El subespacio $\mathcal{L}_cE$ de las formas lineales continuas no es dualmente sumergido, por tanto $C_c(E)$ no tiene la propiedad de extensión de Hahn-Banach.*

DEMOSTRACIÓN: Si toda forma lineal continua ψ definida en $\mathcal{L}_cE$ se pudiera extender a una forma lineal continua $\tilde{\psi}: C_c(E) \to \mathbb{R}$, teniendo en cuenta la observación anterior, $\tilde{\psi} \in \mathcal{L}C_{co}(E)$ y por tanto $\tilde{\psi}_{|\mathcal{L}_{co}E}$ sería también continua, pero esa restricción es otra vez ψ. Y de ahí que $\mathcal{L}\mathcal{L}_{co}E \supseteq \mathcal{L}\mathcal{L}_cE$. El contenido $\mathcal{L}\mathcal{L}_{co}E \subseteq \mathcal{L}\mathcal{L}_cE$ se da siempre y la igualdad $\mathcal{L}\mathcal{L}_{co}E = \mathcal{L}\mathcal{L}_cE$ contradice lo anterior. □

$\mathcal{L}_cE$ es cerrado en $C_c(E)$ ya que es incluso $\omega(E^*, E)$-cerrado.

Todas estas consideraciones nos permiten afinar significativamente algunas consecuencias del Teorema de Banach-Dieudonné. Concretamente, el resultado que damos a continuación era conocido para espacios de Fréchet ([78] IV,6.3 Corollary 2).

Teorema 5.3.11 *Si E es un espacio vectorial topológico metrizable, la topología ew^* de $\mathcal{L}E$ es precisamente la topología compacto-abierta.*

DEMOSTRACIÓN: Por ser E metrizable $\mathcal{L}_{co}E$ es un k-espacio (la demostración es análoga a la de grupos [28] Theorem 1) y por otra parte $(\mathcal{L}E, \tau_{\Lambda_c})$ es también k-espacio (Proposición 5.3.5). Entonces, si probamos que tienen los mismos compactos, obtendremos la igualdad $\tau_{\Lambda_c} = \tau_{co}$. Y aplicando el Teorema 5.3.3 se concluye la demostración.
Como J_E es continua (es consecuencia de que los compactos de $\mathcal{L}_{co}E$ son equicontinuos), $\mathcal{L}_{co}E$ y $\mathcal{L}_cE$ tienen los mismos subconjuntos compactos. Teniendo en cuenta la relación entre las convergencias asociadas a Λ_c, τ_{Λ_c} y τ_{co} (cfr. por ejemplo la demostración de 5.3.7) se obtiene que las familias de τ_{co}-compactos y τ_{Λ_c}-compactos son idénticas. $\square$

A continuación damos un Teorema que nos permitirá, más adelante, comparar las propiedades de BB-reflexividad y completitud para un espacio vectorial topológico localmente convexo.

Teorema 5.3.12 *Sea E un espacio vectorial topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) La estructura de convergencia continua en $\mathcal{L}E$ es compatible con la dualidad (E^*, E).

b) Toda forma lineal definida en $\mathcal{L}E$, tal que $f_{|K}$ es $\omega(E^*, E)$-continua para todo equicontinuo K, es necesariamente $\omega(E^*, E)$-continua en todo el espacio.

Si E es localmente convexo, entonces a) y b) son equivalentes a que E sea BB-reflexivo.

DEMOSTRACIÓN:

a) $\Rightarrow$ b) Sea f una forma lineal tal que $f_{|K}$ es $\omega(E^*, E)$-continua para todo equicontinuo $K \subset \mathcal{L}E = E^*$. En particular, $f_{|K}$ es Λ_c-continua (Proposición 5.3.7) y, por ser (E^*, Λ_c) k-espacio de convergencia, f es Λ_c-continua en E^*. Finalmente, aplicando que Λ_c es compatible con la dualidad (i.e. $\mathcal{L}(E^*, \Lambda_c) = E$), tenemos que, para cierto $x \in E$, $f = J'_E(x)$ que es $\omega(E^*, E)$-continua.

b) $\Rightarrow$ a) Por la relación entre las convergencias $\xrightarrow{\Lambda_c} \Rightarrow \xrightarrow{\tau_{\Lambda_c}} \Rightarrow \xrightarrow{\tau_{co}} \Rightarrow \xrightarrow{w(E^*,E)}$, si $f \in (E^*, \omega(E^*, E))^*$ también $f \in \mathcal{L}(E^*, \Lambda_c)$ sin ninguna condición adicional. Recíprocamente, si $f \in \mathcal{L}(E^*, \Lambda_c)$, $\forall K \subset E^*$ se tiene que $f_{|K}$ es Λ_c-continua y en particular $\omega(E^*, E)$-continua. Y aplicando la hipótesis b) obtenemos que f es $\omega(E^*, E)$-continua.

Luego $(E^*, \omega(E^*, E))^* = \mathcal{L}(E^*, \Lambda_c)$.

Finalmente, si el espacio E es localmente convexo, $\mathcal{L}E$ separa puntos de E, por tanto $J'_E\colon E \to \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ es inyectiva. La suprayectividad se obtiene de a), y en consecuencia E y $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ pueden ser identificados a través de κ_E. Para probar que es abierta basta tener en consideración el siguiente hecho: Siendo E localmente convexo, su topología es la de la convergencia uniforme en los equicontinuos de $\mathcal{L}E$. Los equicontinuos son exactamente los Λ_c-compactos, y esa es también la topología de $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$. Luego E es BB-reflexivo. $\square$

Capítulo 6

Completitud en grupos topológicos

En este Capítulo queremos llegar lo más lejos posible en la tarea de generalizar el Teorema de Grothendieck a los grupos topológicos. El Teorema de Grothendieck sobre completitud de espacios vectoriales topológicos localmente convexos es importante en el marco del Análisis Funcional. Aunque disponemos de todos los instrumentos -el más importante, el concepto de espacio localmente casi-convexo-, veremos que el Teorema de Grothendieck no se puede traducir a grupos en todos sus términos. Daremos algunas afirmaciones parciales, así cómo contraejemplos de otras y propiedades relacionadas con la completitud.

En primer lugar enunciamos el Teorema de Grothendieck y obtenemos dos Teoremas que damos en la forma más conveniente para estudiarlos después en grupos, relacionando la BB-reflexividad y la completitud.

Teorema 6.0.1 *([78]) Sea E un espacio vectorial topológico localmente convexo y sea $\mathfrak{S}$ una familia saturada de subconjuntos acotados de E que recubren E. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$E^*_{\mathfrak{S}}$ es completo.*
2. *Si una forma lineal $f\colon E \to \mathbb{R}$ es tal que $f_{|S}$ es continua para todo $S \in \mathfrak{S}$, entonces f es continua.*

Tomando la familia $\mathfrak{S}$ de los equicontinuos de $\mathcal{L}E$ tenemos:

Teorema 6.0.2 *Sea (E, τ) un espacio localmente convexo, entonces son equivalentes:*

a) *E es completo.*

b) *Cada forma lineal en $\mathcal{L}E$ que es $\omega(\mathcal{L}E, E)$-continua en todo subconjunto equicontinuo de $\mathcal{L}E$, es $\omega(\mathcal{L}E, E)$-continua en $\mathcal{L}E$.*

c) *Cada carácter en ΓE que es $\omega(\Gamma E, E)$-continuo en todo subconjunto equicontinuo de ΓE, es $\omega(\Gamma E, E)$-continuo en ΓE.*

d) *E es BB-reflexivo como espacio vectorial topológico.*

e) *E es BB-reflexivo como grupo topológico.*

DEMOSTRACIÓN:

a) $\Leftrightarrow$ *b)* Es un corolario estandard del Teorema de Grothendieck (cfr. por ejemplo [78]).

b) $\Leftrightarrow$ *d)* Se obtiene del Teorema 5.3.12.

d) $\Leftrightarrow$ *e)* Está probado en [25].

b) $\Rightarrow$ *c)* Sea $\chi: \Gamma E \to \mathbb{T}$ un carácter tal que $\chi_{|H}$ es $\omega(\Gamma E, E)$-continuo para todo $H \subset \Gamma E$ equicontinuo. Entonces $\chi T_E: \mathcal{L}E \to \mathbb{T}$ es un carácter de $\mathcal{L}E$ tal que $(T_E \chi)_{|M}$ es $\omega(\mathcal{L}E, E)$-continuo para todo equicontinuo $M \subset \mathcal{L}E$. Por el Lema 5.1.2(i) y (ii), existe una forma lineal $f: \mathcal{L}E \to \mathbb{R}$ tal que $\rho f = \chi T_E$ and $f_{|M}$ es $\omega(\mathcal{L}E, E)$-continuo para todo equicontinuo $M \subset \mathcal{L}E$. Por b), f es $\omega(\mathcal{L}E, E)$-continuo. Luego, f es la evaluación en algún $x \in E$, $f = J'_E(x)$. Basta demostrar que $\chi = \alpha_E(x)$ (Lema 4.3.11(2)). Para cada $\xi \in \Gamma E$; existe una única forma lineal $g \in \mathcal{L}E$ tal que $\xi = T_E(g)$, entonces $\chi(\xi) = \chi(T_E(g)) = (\rho f)(g) = (\rho J'_E(x))(g) = T_E(g)(x) = \xi(x) = \alpha_E(x)(\xi)$.

c) $\Rightarrow$ *b)* Sea $f: \mathcal{L}E \to \mathbb{R}$ una forma lineal tal que $f_{|H}$ es $\omega(\mathcal{L}E, E)$-continua para todo equicontinuo $H \subset \mathcal{L}E$. El carácter $\rho f: \mathcal{L}E \to \mathbb{T}$ verifica que $(\rho f)_{|H}$ es $\omega(\mathcal{L}E, E)$-continuo para todo equicontinuo $H \subset \mathcal{L}E$. Podemos definir un carácter $\chi: \Gamma E \to \mathbb{T}$ tal que $\chi T_E = \rho f$.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{L}E & \xrightarrow{T_E} & \Gamma E \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \chi} \\
\mathbb{R} & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{T}
\end{array}
$$

Veamos que $\chi_{|M}$ es $\omega(\Gamma E, E)$-continuo para todo equicontinuo $M \subset \Gamma E$. Tomamos una red $\omega(\Gamma E, E)$-convergente en M, sea $\varphi_\alpha \overset{\omega(\Gamma E,E)}{\longrightarrow} \varphi$. Por el Lema 3.1.2, $\varphi_\alpha \xrightarrow{\tau_{co}} \varphi$. Ya que $T_E: E^* \to E^\wedge$ es un isomorfismo topológico, existe una red convergente $g_\alpha \xrightarrow{\tau_{co}} g$ tal que $T_E(g_\alpha) = \varphi_\alpha$ y $T_E(g) = \varphi$. Claramente $g_\alpha \overset{\omega(\mathcal{L}E,E)}{\longrightarrow} g$ y entonces $\chi(\varphi_\alpha) = \chi T_E(g_\alpha) = \rho f(g_\alpha) \to \rho f(g) = \chi T_E(g) = \chi(\varphi)$.

Por c), χ es $\omega(\Gamma E, E)$-continuo. Por el Lema 4.3.11(2), existe $x \in E$ tal que $\chi = \alpha_E(x)$. Demostramos ahora que $f = J'_E(x)$. Sea $g \in \mathcal{L}E$, $\rho(f(g)) = \chi(T_E(g)) = \chi(\rho g) = \alpha_E(x)(\rho g) = (\rho g)(x) = \rho(J'_E(x)(g))$. Así, $\rho(f(g) - J'_E(x)(g)) = exp(2\pi i(f(g) - J'_E(x)(g))) = 1 \Rightarrow f(g) - J'_E(x)(g) \in \mathbb{Z}$, para todo $g \in \mathcal{L}E$. Ya que f y $J'_E(x)$ son formas lineales, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda g) - J'_E(x)(\lambda g) = \lambda(f(g) - J'_E(x)(g)) \in \mathbb{Z}$. Luego $f(g) - J'_E(x)(g) = 0$ para todo $g \in \mathcal{L}E$.

□

Observación 15 *En el trabajo [24] de Butzmann se obtiene que un espacio vectorial topológico es BB-reflexivo si y sólo si es localmente convexo y completo por procedimientos totalmente distintos. El camino que aquí utilizamos es natural habida cuenta del Teorema de Grothendieck.*

Observación 16 *Si el espacio E no es localmente convexo no pueden obtenerse las equivalencias del Teorema 6.0.2, es decir, esta hipótesis es en cierto modo esencial, como demuestra el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 6.0.3 *Sea $E = l_p$ con $0 < p < 1$.*
E es completo, veamos que no se cumple la condición b) del Teorema 6.0.2. La aplicación $J_E: E \to \mathcal{L}_{co}\mathcal{L}_{co}E$ no es sobre (V.Tarieladze, comunicación oral). Por tanto, si tomamos $f \in \mathcal{L}_{co}\mathcal{L}_{co}E \setminus J_E(E)$, para todo $K \subset \mathcal{L}_{co}E$, $f_{|K}$ es continua y $\omega(E^*, E)$-continua y sin embargo f no es $\omega(E^*, E)$-continua en todo el espacio $\mathcal{L}E$ ya que no pertenece a $J_E(E)$.

Tampoco se cumple la condición d) de 6.0.2. Siendo E un espacio métrico, J_E es continua y, por tanto, $\mathcal{L}_cE$ y $\mathcal{L}_{co}E$ tienen los mismos compactos y $\mathcal{L}_{co}\mathcal{L}_{co}E$ es subespacio de $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_cE$. Por tanto, κ_E no es sobre y E no es reflexivo Butzmann, ni $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_cE$ es la compleción de E.

Considerando ahora la familia $\mathfrak{S}$ de los compactos de E, el isomorfismo topológico $T_E : E^*_{co} \to E^\wedge$ y algunos resultados anteriores, obtenemos el siguiente Teorema.

Teorema 6.0.4 *Sea (E, τ) un espacio localmente convexo tal que la envoltura cerrada, convexa y equilibrada de todo compacto es compacta. Son equivalentes:*

a) E^*_{co} es completo.

b) Toda forma lineal en E continua en los compactos, es continua en E.

c) E^*_{co} es BB-reflexivo.

d) $E^\wedge$ es completo.

e) Todo carácter en E continuo en los compactos, es continuo en E.

f) $E^\wedge$ es BB-reflexivo.

6.1 Propiedades relacionadas con la completitud de un grupo

Vamos a dar unas nociones que nos irán descifrando el sentido y las consecuencias de la completitud en grupos topológicos.

Diremos que una función entre espacios topológicos, $f\colon X \to X'$ es *k-continua* si $f_{|K}$ es continua para todo compacto $K \subset X$.

Vimos en § 1.5 que un espacio topológico es k-espacio si y sólo si toda función k-continua es continua.

Un espacio topológico X se denomina *$k_{\mathbb{R}}$-espacio* si toda función k-continua de X en $\mathbb{R}$, es continua.

La condición requerida para que un espacio sea $\mathrm{k}_{\mathbb{R}}$-espacio, a simple vista, es mucho menos exigente que la requerida para ser k-espacio, ya que en la primera definición nada más nos fijamos en aplicaciones reales, mientras que en la segunda el espacio de llegada de las aplicaciones es un espacio topológico cualquiera. La definición de k-grupo también es aparentemente más general que la de k-espacio, pues ahora sólo nos fijamos en un tipo de aplicaciones, los homomorfismos. Se da la siguiente relación:

Proposición 6.1.1 *([68])*
Sea G un grupo topológico Hausdorff. Si G es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio, es k-grupo.

Sin embargo, existen k-grupos que no son $k_{\mathbb{R}}$-espacios.

Ejemplo 6.1.2 *Sea $G = \omega\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\omega}$ donde $\omega\mathbb{R}$ es la suma directa de una cantidad numerable infinita de copias de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{\omega}$ el producto numerable de copias de $\mathbb{R}$ y G tiene la topología producto. Como demostraremos más adelante (6.2.4), G no es $k_{\mathbb{R}}$-espacio pero sí es k-grupo por ser producto de k-grupos.*

Consideremos ahora la siguiente condición:

(*) Todo homomorfismo de G en $\mathbb{T}$, k-continuo, es continuo.

Llamaremos *$k_{\mathbb{T}}$-grupos* a los grupos topológicos que verifiquen la propiedad (*).

Evidentemente, todo k-grupo, es $k_{\mathbb{T}}$-grupo. La afirmación recíproca no es cierta, como se demuestra a continuación.

Ejemplo 6.1.3 *Sea $G = E_{\omega}$, un espacio de Banach con la topología débil respecto de la familia de formas lineales, que se suele designar $\omega(E, E^*)$.*
Por el Teorema 3.1.9, se comprueba que α_G no es continua, y por tanto G no es k-grupo.
Veamos que G es un $k_{\mathbb{T}}$-grupo: sea $f\colon E_{\omega} \to \mathbb{T}$ un homomorfismo de grupos tal que $f_{|K}$ es continua para todo compacto $K \subset E_{\omega}$. En particular $f_{|K}$ es continua para todo compacto $K \subset E$. Entonces, por ser E un k-espacio, $f\colon E \to \mathbb{T}$ es continuo. Luego $f \in \Gamma E = \Gamma E_{\omega}$.

Proposición 6.1.4 *Sea G un $k_{\mathbb{T}}$-grupo y $f\colon G \to H$ un homomorfismo en otro grupo topológico H tal que $f_{|K}$ es continuo, $\forall K \subset G$ compacto, entonces $f\colon (G, \omega(G, G^{\wedge})) \to (H, \omega(H, H^{\wedge}))$ es continuo.*
Y, en particular, $f\colon G \to (H, \omega(H, H^{\wedge}))$ es continuo.

Demostración: Basta probar que ψf es continuo para todo $\psi \in H^{\wedge}$. Sabemos que $\psi f_{|K}$ es continuo, $\forall K \subset G$ compacto. Luego ψf es continuo, ya que G es un $k_{\mathbb{T}}$-grupo. □

Sea τ_{gk} la *topología de k-grupo* asociada a un grupo topológico (G, τ).

Proposición 6.1.5 *G es un $k_{\mathbb{T}}$-grupo si y sólo si $(G,\tau)^\wedge = (G,\tau_{gk})^\wedge$. Y, en este caso, también $(G,\tau)^{\wedge\wedge} = (G,\tau_{gk})^{\wedge\wedge}$. Además, para cualquier topología de grupo tal que $\tau < \nu < \tau_{gk}$, se verifica $(G,\tau)^\wedge = (G,\nu)^\wedge$ y $(G,\tau)^{\wedge\wedge} = (G,\nu)^{\wedge\wedge}$.*

DEMOSTRACIÓN:

$\Rightarrow$) Por cumplirse $\tau < \tau_{gk}$, tenemos $\Gamma(G,\tau) \subseteq \Gamma(G,\tau_{gk})$.
Veamos el otro contenido: sea $f \in \Gamma(G,\tau_{gk})$, entonces f es un homomorfismo de (G,τ) en $\mathbb{T}$ tal que $f_{|K}$ es continuo para todo $K \subset G$ compacto. Si G es un $k_{\mathbb{T}}$-grupo, f es continuo y entonces $f \in \Gamma(G,\tau)$.
Además, (G,τ) y (G,τ_{gk}) tienen los mismos compactos, luego $(G,\tau)^\wedge = (G,\tau_{gk})^\wedge$.

$\Leftarrow$) Sea $f\colon G \to \mathbb{T}$ un homomorfismo tal que $f_{|K}$ es continuo para todo $K \subset G$ compacto, entonces $f \in (G,\tau_{gk})^\wedge = (G,\tau)^\wedge$ y, por tanto, f es continuo.

La última consecuencia es obvia, ya que los duales de (G,τ) y (G,τ_{gk}) coinciden algebraicamente y topológicamente porque τ y τ_{gk} poseen los mismos compactos, así pues, lo mismo le sucederá a cualquier topología que esté comprendida entre ellas. $\square$

Es un hecho conocido que si G es k-grupo, $G^\wedge$ es completo ([5]). Con la hipótesis más débil de ser $k_{\mathbb{T}}$-grupo obtenemos la misma tesis.

Proposición 6.1.6 *Si G es un $k_{\mathbb{T}}$-grupo, $G^\wedge$ es completo. La recíproca no es cierta.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{\varphi_\beta\}_{\beta\in B} \subset G^\wedge$ una red de Cauchy. Para cada $x \in G$, existe $\beta_x \in B$ tal que para todo $\beta', \beta'' \geq \beta_x$, $\varphi_{\beta'} - \varphi_{\beta''} \in (\{x\}, B_1)$. Luego $\{\varphi_\beta(x)\}_{\beta\in B}$ es una red de Cauchy en $\mathbb{T}$, que converge por ser $\mathbb{T}$ completo. Sea $z_x = \lim \varphi_\beta(x)$ y designemos por $\varphi\colon G \to \mathbb{T}$ la aplicación $x \mapsto z_x$.

- φ es un homomorfismo.
  Sean $x, y \in G$. Como φ_β es homomorfismo para todo $\beta \in B$, $\varphi_\beta(x+y) = \varphi_\beta(x) + \varphi_\beta(y)$ y, por la unicidad del límite, $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

- φ es continuo.
  Estamos suponiendo que G es $k_{\mathbb{T}}$-grupo, por tanto basta ver que $\varphi_{|K}$ es continuo, $\forall K \subset G$ compacto.
  Consideremos la red $\{\varphi_{\beta_{|K}}\}_{\beta\in B}$. Es una red de Cauchy en $C(K,\mathbb{T})$. En efecto, dado $S \subset K$ compacto y $W \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1)$, designamos por $(S,W)_K = \{\varphi \in$

$C(K,\mathbb{T}) : \varphi(S) \subset W\}$ y por $(S,W) = \{\varphi \in \Gamma G : \varphi(S) \subset W\}$. Si $j\colon K \hookrightarrow G$ designa la inclusión, $j^*\colon C(G,\mathbb{T}) \to C(K,\mathbb{T})$ es la aplicación restricción, i.e. $f \mapsto f_{|K}$. Entonces se cumple $j^*(S,W) \subseteq (S,W)_K \cap j^*(C(G,\mathbb{T}))$. Como $\{\varphi_\beta\}_{\beta\in B}$ es de Cauchy en $G^\wedge$, existe β_0 tal que $\varphi_\beta - \varphi_{\beta'} \in (S,W)$, $\forall \beta, \beta' \geq \beta_0$. En particular $\varphi_{\beta|K} - \varphi_{\beta'|K} \in (S,W)_K$, $\forall \beta,\beta' \geq \beta_0$.
Ahora tenemos que $C(K,\mathbb{T})$ es espacio métrico completo. Por tanto existe $\psi_K \in C(K,\mathbb{T})$ tal que $\varphi_{\beta|K} \to \psi_K$.
En particular $\varphi_{\beta|K}(x) \to \psi_K(x)$ para todo $x \in K$. Pero también $\varphi_{\beta|K}(x) = \varphi_\beta(x) \to \varphi(x)$. Siendo $\mathbb{T}$ de Hausdorff, $\psi_K(x) = \varphi(x)$, $\forall x \in K$, y por tanto $\varphi_{|K} = \psi_K$ es continuo.

- Por último, $\varphi_\beta \to \varphi$.
  Para cada compacto $S \subset G$ y cada $W \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1)$ podemos determinar β_0 tal que $\varphi_{\beta|S} - \varphi_{|S} \in (S,W)$, $\forall \beta \geq \beta_0$ y de ahí que $\varphi_\beta - \varphi \in (S,W)$, $\forall \beta \geq \beta_0$.

La no reversibilidad de esta implicación queda probada en los comentarios que siguen a 6.1.10. □

En 6.1.3 se da un ejemplo de $k_{\mathbb{T}}$-grupo, G, para el que α_G no es continua. La implicación contraria tampoco se verifica, como demuestra el siguiente Ejemplo. Así pues ser $k_{\mathbb{T}}$-grupo es independiente de que α_G sea continua.

Ejemplo 6.1.7 *Sea E el espacio de Komura, definido en [57] §5. La aplicación $\alpha_{E^\wedge}$ es continua por ser E reflexivo como grupo. Sin embargo $E^{\wedge\wedge}$ no es completo, por tanto $E^\wedge$ no es $k_{\mathbb{T}}$-grupo.*

La Proposición 6.1.6 viene a ser la generalización de $e) \Rightarrow d)$ de 6.0.4. Daremos ahora la generalización de $e) \Leftrightarrow c)$ de 6.0.2 y, para grupos con α_G continua, como consecuencia de 6.1.6, también obtendremos la generalización de $c) \Rightarrow a)$ de 6.0.2. Después veremos que ambos recíprocos no son ciertos.

Teorema 6.1.8 *Sea G un grupo topológico localmente casi-convexo, son equivalentes:*

(a) G es BB-reflexivo.

*(b) Todo carácter en ΓG que es $\omega(\Gamma G, G)$-continuo en cada equicontinuo de ΓG, es $\omega(\Gamma G, G)$-continuo en ΓG.
Es decir, $(\Gamma G, \omega(\Gamma G, G))$ es $k_{\mathbb{T}}$-grupo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\chi\colon \Gamma G \to \mathbb{T}$ un carácter tal que $\chi_{|H}$ es $\omega(\Gamma G, G)$-continuo, para todo H equicontinuo, en particular $\chi_{|H}$ es Λ_c-continuo para todo H compacto y, por la Proposición 1.5.4, χ es Λ_c-continuo, i.e. $\chi \in \Gamma\Gamma_c G$. Si G es BB-reflexive, $\Gamma_c\Gamma_c G \cong G$ y $\chi = \kappa_G(x)$ para algún $x \in G$. Luego χ es $\omega(\Gamma G, G)$-continuo.
Recíprocamente, basta demostrar que κ_G es sobre ya que siempre es continua y, siendo G localmente casi-convexo, es también inyectiva y abierta en la imagen. Sea $\psi\colon \Gamma_c G \to \mathbb{T}$ un carácter continuo. Entonces, $\psi_{|H}$ es Λ_c-continuo y equivalentemente $\psi_{|H}$ es $\omega(\Gamma G, G)$-continuo (Lema 3.1.2) para todo subconjunto equicontinuo $H \subset \Gamma G$. Por b), ψ es $\omega(\Gamma G, G)$-continuo, luego $\psi \in \Gamma(\Gamma G, \omega(\Gamma G, G)) = \kappa_G(G)$. Así κ_G es sobre. □

Corolario 6.1.9 *Sea G un grupo con α_G continua, localmente casi-convexo, tal que todo carácter $\varphi\colon \Gamma G \to \mathbb{T}$ que verifica que $\varphi_{|H}$ es $\omega(\Gamma G, G)$-continuo, para todo $H \subset \Gamma G$ equicontinuo, es $\omega(\Gamma G, G)$-continuo. Entonces G es completo.*

DEMOSTRACIÓN: En este caso podemos afirmar que $G^\wedge$ es $\mathrm{k}_{\mathbb{T}}$-grupo. En efecto, sea $\varphi\colon \Gamma G \to \mathbb{T}$ un carácter tal que $\varphi_{|K}$ es continuo, para todo $K \subset G^\wedge$ compacto. Por ser α_G continua, los compactos son equicontinuos y por un fácil argumento podemos concluir que $\varphi_{|H}$ es continuo, para todo $H \subset G^\wedge$ equicontinuo. Pero en un equicontinuo coinciden la topología $\omega(\Gamma G, G)$ y la compacto-abierta, luego aplicando la hipótesis obtenemos que φ es $\omega(\Gamma G, G)$-continuo y, en particular, φ es continuo de $G^\wedge$ en $\mathbb{T}$.

Aplicando ahora la Proposición 6.1.6 tenemos que $G^{\wedge\wedge}$ es completo. Por el Teorema 6.1.8, G es BB-reflexivo y, por ser α_G continua, G es también Pontryagin reflexivo. Luego $G \cong G^{\wedge\wedge}$ es completo. □

Con el siguiente Ejemplo demostramos que el recíproco no es cierto.

Ejemplo 6.1.10 *Sea $G = L^2_{\mathbb{Z}}[0,1]$. Como se vió en 5.2.4 G no es Pontryagin reflexivo, siendo localmente casi-convexo, metrizable y completo (Proposición 5.2.4). Así $\Gamma G^\wedge \neq \alpha_G(G)$ (si α_G fuera sobre automáticamente sería Pontryagin reflexivo) y por tanto existe $\psi \in \Gamma G^\wedge \setminus \alpha_G(G)$, que no es $\omega(\Gamma G, G)$-continuo ya que el dual $(\Gamma G, \omega(\Gamma G, G))^\wedge = G$ (Lema 4.3.12). Sin embargo para todo equicontinuo $H \subset G^\wedge$, $\psi_{|H}$ es τ_{co}-continuo, pues se trata de la restricción de un carácter continuo. Como en H coinciden la topología débil y la compacto-abierta, tenemos que $\psi_{|H}$ es continuo en $\omega(\Gamma G, G)_{|H}$, $\forall H$ equicontinuo. Sin embargo ψ no es débilmente continuo.*

Sea G un grupo metrizable, localmente casi-convexo. Veamos que si se verificase el recíproco de la Proposición 6.1.6 también se verificaría el recíproco del Corolario 6.1.9, que está en contradicción con el Ejemplo 6.1.10. En efecto, supongamos que G es completo, vamos a expresarlo como un dual. Llamemos $L = (\Gamma G, \omega(\Gamma G, G))$, sabemos que los compactos de L son equicontinuos (3.1.12) y por tanto el grupo dual ΓL, dotado de la topología compacto-abierta, $L^\wedge$, se puede identificar a G que es completo. Ahora, L es un $k_{\mathbb{T}}$-grupo porque estamos suponiendo que se verifica el recíproco de 6.1.6. Es decir, todo carácter $\varphi\colon L \to \mathbb{T}$ tal que $\varphi_{|K}$ es continuo para todo compacto $K \subset L$, es continuo. Los compactos de L son precisamente los subconjuntos de ΓG, $\omega(\Gamma G, G)$-compactos que además coinciden con los equicontinuos cerrados de $G^\wedge$. Así tenemos que para todo carácter $\varphi\colon G^\wedge \to \mathbb{T}$ tal que $\varphi_{|H}$ es $\omega(\Gamma G, G)$-continuo para todo equicontinuo $H \subset L$, φ es $\omega(\Gamma G, G)$-continuo.

En cuanto al Teorema de Grothendieck en su versión general 6.0.1, hemos obtenido que 1) $\not\Leftarrow$ 2) ya que no se da para la familia concreta $\mathfrak{S}$ de los conjuntos compactos.

6.1.1 Compleción de un grupo topológico

Proposición 6.1.11 *Si G es un grupo de convergencia localmente compacto y sus subconjuntos compactos son topológicos, entonces $\Gamma_c G$ es completo.*

Demostración: Utilizando que $\Gamma_c G$ es topológico y su topología es la compacto-abierta respecto a los compactos de convergencia de G (Proposición 3.2.5), la demostración es como la de la Proposición 6.1.6. Sea (f_α) una red de Cauchy de $\Gamma_c G$, entonces $(f_\alpha(x))$ es de Cauchy en $\mathbb{T}$, para todo $x \in G$, y podemos definir $f\colon G \to \mathbb{T}$ como $f(x) = \lim f_\alpha(x)$. Ya que para cada compacto $K \subset G$, $(f_\alpha|_K)$ pertenece a $C(K, T)$ que es un espacio completo, tenemos que $f|_K$ es continuo para todo compacto $K \subset G$, así, por la Proposición 1.5.4, f es continuo en G. Luego (f_α) converge a $f \in \Gamma_c G$. □

En particular, aplicando este resultado al dual de convergencia de un grupo topológico, que por [29] y 1.4.4 cumple las hipótesis anteriores, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.1.12 *Para todo grupo topológico G, $\Gamma_c\Gamma_c G$ es completo.*

Sin embargo, dado G localmente casi-convexo, $\Gamma_c\Gamma_c G$ no es en general su compleción. En el Ejemplo 6.1.10 vemos que $G = L^2_{\mathbb{Z}}[0,1]$ es un grupo metrizable, localmente casi-convexo, con α_G continua pero no sobre. Teniendo en cuenta que $\Gamma\Gamma_c G = \Gamma G^\wedge$, tampoco κ_G es sobre y, por tanto, la situación es que $G \cong \kappa_G(G)$ está estrictamente contenido en $\Gamma_c\Gamma_c G$. Como G es completo, queda claro que $\Gamma_c\Gamma_c G$ no es la compleción de G. Esta es una diferencia con los espacios vectoriales ya que Butzmann demostró que para un espacio localmente convexo E, $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ es la compleción de E.

Observemos también que del Corolario 6.1.12 se deduce que todo grupo topológico BB-reflexivo es completo. Así, del Teorema 6.1.8, obtenemos en general el resultado de 6.1.9 para grupos localmente casi-convexos.

6.2 Relación entre la topología asociada a la estructura de la convergencia continua y la topología compacto-abierta

Por resultados anteriores sabemos que la relación entre la convergencia de redes o filtros en el dual de un grupo topológico o de convergencia, en general, es:

$$\xrightarrow{\Lambda_c} \implies \xrightarrow{\tau_{\Lambda_c}} \implies \xrightarrow{\tau_{co}} \qquad (**)$$

Por ser τ_{co} de Hausdorff, tenemos que Λ y τ_{Λ_c} también lo son. Para un grupo topológico G, con la condición de que $e_G\colon G^\wedge \times G \to \mathbb{T}$ sea continua, se obtiene (Teorema 4.5.3) que $G^\wedge$ es localmente compacto y, por tanto, $\tau_{co} = \Lambda_c$. Describimos a continuación algunos resultados parciales en relación a la no reversibilidad de las flechas.

Proposición 6.2.1 *Sea G un grupo topológico tal que α_G es continua. Consideremos las siguientes afirmaciones:*

1. $\tau_{co} = \tau_{\Lambda_c}$ *en* ΓG,
2. $G^\wedge$ *es* k*-espacio,*
3. $C(G^\wedge) = C(\Gamma_c G)$.

Se verifica 1. $\Leftrightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3.
Si $(\Gamma G, \tau_{\Lambda_c})$ es completamente regular, se da también 3. $\Rightarrow$ 1.

DEMOSTRACIÓN:

1\. $\Rightarrow$ 2. Por ser $\Gamma_c G$ localmente compacto, $(\Gamma G, \tau_{\Lambda_c})$ es k-espacio topológico (Proposición 1.5.4). Y como estamos suponiendo $\tau_{co} = \tau_{\Lambda_c}$, $G^\wedge$ es también k-espacio.

2\. $\Rightarrow$ 1. De (**) se deduce $\tau_{co} \subset \tau_{\Lambda_c}$. Para ver $\tau_{co} \supset \tau_{\Lambda_c}$, sea $C \subset \Gamma G$, τ_{Λ_c}-cerrado. En particular $C \cap K$ es τ_{Λ_c}-cerrado en K, para todo Λ_c-compacto. Por el Teorema 3.1.9 se tiene que $C \cap K$ es τ_{co}-cerrado en K, y por ser $G^\wedge$ k-espacio, C es τ_{co}-cerrado.

2\. $\Rightarrow$ 3. Por (**), $C(G^\wedge) \subset C(\Gamma_c G)$.
Veamos el otro contenido. Sea $\varphi: \Gamma G \to \mathbb{R}$ una función Λ_c-continua. Si $K \subset \Gamma G$ es Λ_c-compacto, $\varphi_{|K}$ es Λ_c-continua. Por el Teorema 3.1.9 $\varphi_{|K}$ es también τ_{co}-continua. Y, ya que $G^\wedge$ es k-espacio, φ es τ_{co}-continua.

Teniendo en cuenta que una función $f: (\Gamma G, \Lambda_c) \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si $f: (\Gamma G, \tau_{\Lambda_c}) \to \mathbb{R}$ lo es, tenemos $C(\Gamma_c G) = C((\Gamma G, \tau_{\Lambda_c}))$.
Supongamos que $(\Gamma G, \tau_{\Lambda_c})$ es completamente regular, entonces, τ_{Λ_c} es la topología débil respecto al conjunto de aplicaciones $C((\Gamma G, \tau_{\Lambda_c}))$. Como $G^\wedge$ ya es completamente regular, τ_{co} es la topología débil respecto a $C(G^\wedge)$. Si se verifica 3., $C(G^\wedge) = C(\Gamma_c G) = C((\Gamma G, \tau_{\Lambda_c}))$, y las dos topologías, τ_{co} y τ_{Λ_c} coinciden. □

Veamos que un grupo topológico G que verifica las condiciones 1. y 2. también cumple $\Gamma_c \Gamma_c G = G^{\wedge\wedge}$. Sin embargo, esta condición no es equivalente a 1. y 2, como se verá en el Ejemplo 6.2.4.

Teorema 6.2.2 *En un grupo topológico G, son equivalentes:*

a) Los grupos topológicos $\Gamma_c \Gamma_c G$ y $G^{\wedge\wedge}$ coinciden.

b) α_G es continua y $G^\wedge$ es $k_{\mathbb{T}}$-grupo.

Observemos que un grupo topológico G que cumple estas condiciones tiene bidual $G^{\wedge\wedge}$ completo.

DEMOSTRACIÓN:

a) $\Rightarrow$ b) Supongamos que $\Gamma_c \Gamma_c G = G^{\wedge\wedge}$. Entonces α_G es continua, ya que κ_G lo es y, bajo dicha hipótesis, κ_G coincide con α_G. Sea $\Psi: G^\wedge \to \mathbb{T}$ un homomorfismo tal que $\Psi_{|K}$ es continuo, para todo compacto $K \subset G^\wedge$. En particular $\Psi_{|K}$ es continuo, para todo compacto $K \subset \Gamma_c G$. Luego, por ser $\Gamma_c G$ localmente compacto (Proposición 3.2.2), Ψ es continuo (Proposición 1.5.4).

b) $\Rightarrow$ a) Por ser α_G continua, $G^{\wedge\wedge}$ es subgrupo topológico de $\Gamma_c\Gamma_c G$ (Proposición 3.2.7). Para ver que coinciden, sea $\Psi \in \Gamma_c\Gamma_c G$. Entonces $\Psi_{|K}$ es continuo, para todo K compacto de $\Gamma_c G$, pero los compactos de $\Gamma_c G$ son los mismos que los de $G^\wedge$ y, por b), $\Psi\colon G^\wedge \to \mathbb{T}$ es continuo, luego pertenece a $G^{\wedge\wedge}$

La última afirmación se sigue de 6.1.12. □

Corolario 6.2.3 *Sea G un grupo topológico. Si α_G es continua y $G^\wedge$ es k-grupo, entonces $G^{\wedge\wedge} = \Gamma_c\Gamma_c G$.*

A continuación damos un ejemplo de grupo G en el que $G^{\wedge\wedge} = \Gamma_c\Gamma_c G$ y, sin embargo τ_{co} y τ_{Λ_c} son distintas. Más aún, τ_{Λ_c} no es topología de grupo.

Ejemplo 6.2.4 *Sea $G = \omega\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\omega$ donde $\omega\mathbb{R}$ es la suma directa de una cantidad numerable infinita de copias de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^\omega$ el producto numerable de copias de $\mathbb{R}$ y G tiene la topología producto.*
Recordemos que $(\omega\mathbb{R})^\wedge \cong \mathbb{R}^\omega$ y viceversa ([8] 14.11). Por tanto $G^\wedge \cong G$.

a) $\mathbb{R}^\omega$ es metrizable y, por tanto, k-espacio. $\omega\mathbb{R}$ es k-espacio por ser el dual de un grupo metrizable ([28] Theorem 1). Luego G es producto de k-espacios y, en particular, de k-grupos, entonces es un k-grupo ([68] Theorem 1.3).

b) Veamos que G no es k-espacio ([8] (17.9)).
El grupo G está formado por sucesiones de índices en $\mathbb{Z}$, con una cantidad finita de términos no nulos para los índices negativos. Los conjuntos de la forma $\{(x_n) \in G : |x_n| < \varepsilon$ para $n \leq n_0\}$ son base de entornos de 0. Consideremos la función $\varphi\colon (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \to \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n x_{-n}$; veamos que no es continua y que, sin embargo, $\varphi_{|K}$ es continua, $\forall K \subset G$ compacto.
Sea $K \subset \omega\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\omega$ compacto. Sus proyecciones, $p_1(K) \subset \omega\mathbb{R}$ y $p_2(K) \subset \mathbb{R}^\omega$ son también compactas y $K \subset p_1(K) \times p_2(K)$. Por tanto, si $\varphi_{|p_1(K)\times p_2(K)}$ es continua, también lo es $\varphi_{|K}$. Pero $\varphi_{|p_1(K)\times p_2(K)}(z_n) = \sum_{n=j_1,\dots,j_r} z_{-n}z_n$ porque $p_1(K) \subset \omega\mathbb{R}$ ha de estar contenido en un subespacio finito dimensional. Es

decir, $\varphi_{|p_1(K)\times p_2(K)}$ queda reducida a una suma finita, que es continua Veamos ahora que φ no es continua. Sea $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$, un entorno de 0 en $\mathbb{R}$. Claramente $\varphi(0,0) = 0$. Vamos a ver que para todo $L \times M \in \mathcal{B}_G(0,0)$, $\varphi(L \times M) \not\subset V$. Si $L \in \mathcal{B}_{\omega\mathbb{R}}(0)$ es de la forma $L = \prod V_i \cap \omega\mathbb{R}$ con V_i abierto en $\mathbb{R}$ para todo i y contiene puntos distintos de 0 en todas las componentes. Sea $M = \prod W_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^\omega}(0)$ con $W_i = \mathbb{R}$ para casi todo i y W_i abierto para todo i. Si tomamos una componente de M, $W_j = \mathbb{R}$, y $a \in L$ con $a_{-j} \neq 0$, los puntos $a \times b_z = (\ldots, 0, \ldots, a_{-j}, \ldots, 0) \times (0, \ldots, \overset{j)}{z}, \ldots, 0 \ldots) \in L \times M$, $\forall z \in \mathbb{R}$ y (a, b_z), no verifican, en general, $\varphi(a \times b_z) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

c) *Tenemos que α_G es continua, por ser G k-grupo ([68] Theorem 2.3), y por tanto $\Gamma_c G$ y $G^\wedge$ tienen los mismos compactos.*

d) *$(\Gamma G, \tau_{\Lambda_c})$ es k-espacio (Corolario 3.2.3).*

Entonces teniendo en cuenta b) y d), $\tau_{co} \neq \tau_{\Lambda_c}$.
Luego τ_{Λ_c} no puede ser topología de grupo. En efecto, $(\Gamma G, \tau_{\Lambda_c})$ es k-espacio; si τ_{Λ_c} fuese topología de grupo, sería también k-grupo y por tener los mismos compactos que $G^\wedge$, siendo ya τ_{co} topología de k-grupo, tendrían que coincidir.
Y además, por ser $G^\wedge$ k-grupo, $G^{\wedge\wedge} = \Gamma_c \Gamma_c G$ (Proposición 6.2.3).

A continuación veremos que el ejemplo anterior puede extenderse a toda la clase de grupos de la forma $G^\wedge \times G$, con G grupo metrizable, reflexivo, no localmente compacto.

En lo que sigue hacemos uso repetidas veces del siguiente resultado de Bagley y Yang de [6]:

Lema 6.2.5 *Sean X, Y espacios topológicos de Hausdorff y $F \subset C(X, Y)$. Si τ es una topología en F que contiene a la compacto-abierta de F, y tal que $(F, \tau) \times X$ es un k-espacio, entonces τ es topología admisible para F.*

Proposición 6.2.6 *Sea G un grupo topológico metrizable, reflexivo, no localmente compacto. Entonces $e\colon (\Gamma G, \tau_{\Lambda_c}) \times G \to \mathbb{T}$ no es continua.*

Demostración: Por ser G metrizable, α_G es continua y $G^\wedge$ es k-espacio. Por 6.2.1, $\tau_{co} = \tau_{\Lambda_c}$. Siendo G reflexivo, si la evaluación $e\colon G^\wedge \times G \to \mathbb{T}$ fuera continua, tendríamos que G es localmente compacto ([63]), lo que contradice la hipótesis. $\square$

Observaciones 17 *La Proposición 6.2.6, junto con el Lema 6.2.5, demuestran que:*

1. *Si G es un grupo metrizable, reflexivo, no localmente compacto, el producto $L := G^\wedge \times G$ no es k-espacio.*
   Sin embargo L es k-grupo, por ser un producto de k-grupos.
   Observemos que $L^\wedge \cong L$ no es k-espacio y $(\Gamma L, \tau_{\Lambda_c})$ si lo es (Corolario 3.2.3).
   Por tanto, $\tau_{co} \neq \tau_{\Lambda_c}$ y τ_{Λ_c} no puede ser topología de grupo en ΓL.
   Esto generaliza el ejemplo de $\mathbb{R}^\omega \times \omega\mathbb{R}$.

2. *$e\colon (\Gamma G, \Lambda_c) \times G \to \mathbb{T}$ continua $\not\Longrightarrow$ $e\colon (\Gamma G, \tau_{\Lambda_c}) \times G \to \mathbb{T}$ continua, lo que contrasta con el resultado de la Proposición 1.4.1.*

Observación 18 *La topología asociada a un localmente compacto de convergencia, no es en general localmente compacta.*
Sea G un grupo topológico metrizable, reflexivo, no localmente compacto. $\Gamma_c G$ es localmente compacto de convergencia. Como $\tau_{\Lambda_c} = \tau_{co}$ en ΓG, obviamente $(\Gamma G, \tau_{\Lambda_c})$ no puede ser localmente compacto, de lo contrario lo sería también su dual $G^{\wedge\wedge}$, que por ser isomorfo a G no lo es.

Si G es un grupo topológico, la topología asociada a la estructura de la convergencia continua, τ_{Λ_c} en ΓG, es de k-espacio. Sin embargo, se deduce de la observación anterior que, en general, no es localmente compacta.

Proposición 6.2.7 *Sea G un grupo topológico con α_G continua. Si $(\Gamma G, \tau_{\Lambda_c})$ es localmente compacto, $\Gamma_c G$ es topológico y por tanto coinciden Λ_c y τ_{Λ_c}. En ese caso τ_{Λ_c} es topología de grupo.*

DEMOSTRACIÓN: Comprobamos que las redes Λ_c-convergentes son precisamente las τ_{Λ_c}-convergentes. Basta ver que si $(\xi_\alpha) \subset \Gamma G$ es una red tal que $\xi_\alpha \overset{\tau_{\Lambda_c}}{\to} \xi$, entonces $\xi_\alpha \overset{\Lambda_c}{\to} \xi$.
Tenemos que existe $K \in \mathcal{B}_{\tau_{\Lambda_c}}(\xi)$ compacto tal que contiene eventualmente a la red (existe α_0 tal que $\xi_\alpha \in K$, $\forall \alpha \geq \alpha_0$).
Si $(x_\beta) \subset G$ converge a 0, se verifica $\alpha_G(x_\beta) \to \alpha_G(0)$ en $G^{\wedge\wedge}$. Como $\tau_{co} \subset \tau_{\Lambda_c}$, K es τ_{co}-compacto y para $W \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1)$, $(K, W) \in \mathcal{B}_{G^{\wedge\wedge}}(0)$. Luego, existe β_0 tal que $\alpha_G(x_\beta)(K) \subset W$, $\forall \beta \geq \beta_0$. En particular $\forall (\alpha, \beta) \geq (\alpha_0, \beta_0)$, $\xi_\alpha(x_\beta) \in W$. □

Ejemplos de grupos que cumplen esta condición son los subgrupos densos de grupos metrizables localmente compactos abelianos. A continuación incluimos el más sencillo de ellos, haciendo los cálculos, ya que nos ha servido de inspiración para el resultado 6.2.7.

Ejemplo 6.2.8 *Sea $G = \mathbb{Q}$, que no es localmente compacto. Por 3.2.2, el dual de convergencia $\Gamma_c\mathbb{Q}$ es localmente compacto. Por ser $\mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}$ los duales topológicos coinciden ([28] Theorem 2), $\mathbb{Q}^\wedge = \mathbb{R}^\wedge \cong \mathbb{R}$.*
Consideremos los dos duales, $\Gamma_c\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^\wedge$, cuyo conjunto soporte es $\mathbb{R}$, y veamos que las estructuras coinciden y, por tanto, que $\Gamma_c\mathbb{Q}$ es topológico.
Sea (r_α) una red en $\mathbb{R}$. Basta ver que si es τ_{co}-convergente a 0, es también Λ_c-convergente a 0, porque el recíproco siempre se cumple. Sea (x_β) una red convergente a x en $\mathbb{Q}$, veamos que $r_\alpha(x_\beta) \to 1$ en $\mathbb{T}$. Dado $W \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1)$, podemos determinar ε y μ tales que $e^{2\pi ilk} \in W$, $\forall l \leq \varepsilon$ y $\forall k \leq \mu$. Como $r_\alpha \overset{\tau_{co}}{\to} 0$ y $x_\beta \to x$, podemos encontrar α_0 y β_0 tales que $|r_\alpha| < \varepsilon$, $\forall \alpha \geq \alpha_0$ y $|x_\beta - x| < \mu$, $\forall \beta \geq \beta_0$. Luego $e^{2\pi i r_\alpha(x_\beta - x)} \in W$, $\forall \alpha \geq \alpha_0$ y $\forall \beta \geq \beta_0$.

Proposición 6.2.9 *Sea G un grupo topológico. Si α_G es continua, $G^\wedge$ es $k_{\mathbb{T}}$-grupo y $(\Gamma G, \tau_{\Lambda_c})$ es localmente compacto, entonces $\tau_{co} = \tau_{\Lambda_c}$.*

Demostración: Por la Proposición 6.2.7, τ_{Λ_c} y Λ_c tienen las mismas redes convergentes; basta ver que $\xi_\alpha \xrightarrow{\tau_{co}} \xi \Rightarrow \xi_\alpha \xrightarrow{\Lambda_c} \xi$. Tomamos $x_\beta \to 0$ en G, entonces $\alpha_G(x_\beta) \to 0$ en $G^{\wedge\wedge}$. Sea $K \in \mathcal{B}_{\tau_{\Lambda_c}}(0)$ compacto, K es también τ_{co}-compacto y, para $W \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1)$, $\alpha_G(x_\beta)$ está eventualmente en (K, W). Como $G^{\wedge\wedge} = \Gamma_c\Gamma_c G$, tenemos que $\xi_\alpha(x_\beta) = (\alpha_G(x_\beta))(\xi_\alpha) \to 1$, luego $\xi_\alpha \xrightarrow{\Lambda_c} \xi$. □

Con estos resultados obtenemos que si G es un grupo topológico con α_G continua tal que $G^\wedge$ es $k_{\mathbb{T}}$-grupo, entonces $(\Gamma G, \tau_{\Lambda_c})$ es localmente compacto si y sólo si $(\Gamma G, \tau_{co})$ es localmente compacto.

Observemos una diferencia esencial entre el conjunto de los caracteres continuos, $\Gamma_c G$, y el de las funciones reales continuas en general, $C_c(G)$, definidos en un grupo topológico G.
$C_c(G)$ es topológico si y sólo si G es localmente compacto ([55] Corollary 3.8). Sin embargo, que $\Gamma_c G$ sea topológico no implica que G sea localmente compacto, como demuestra las consideraciones anteriores y el Ejemplo 6.2.8.

6.3 La propiedad ccp

En el marco de los espacios localmente convexos el Teorema de Krein da lugar a considerar por sí misma una propiedad que se ha denominado en la literatura la "convex compactness property (ccp)" [70]. Como se ve en la Proposición 6.3.2 esta propiedad equivale a la completitud para espacios metrizables.

Diremos que un espacio vectorial topológico localmente convexo E *tiene la propiedad ccp* (convex compactness property) si la envoltura convexa, equilibrada y cerrada de todo compacto $K \subseteq E$ es de nuevo compacto.

Aunque la definición tiene sentido para espacios vectoriales topológicos, también se sabe que todo espacio no localmente convexo posee un compacto cuya envoltura cerrada, equilibrada y convexa no es compacta ([1]).

Por analogía diremos que un grupo localmente casi-convexo G *tiene la propiedad ccp* si la envoltura casi-convexa de todo compacto $K \subseteq G$ es de nuevo un conjunto compacto.

En un espacio vectorial topológico E, sean $A \subset E$, $B \subset E^*$ subconjuntos no vacíos, entonces $A^{\triangleright}$ es $\omega(E^*, E)$-cerrado. Si E es localmente convexo, también $B^{\triangleleft}$ es $\omega(E, E^*)$-cerrado y todo subconjunto convexo, cerrado de E es $\omega(E, E^*)$-cerrado. Asimismo, en grupos, la envoltura casi-convexa de cualquier subconjunto es siempre $\omega(G, G^{\wedge})$-cerrada y simétrica.

Un espacio vectorial topológico localmente convexo E es también un grupo localmente casi-convexo. Aplicando el teorema bipolar y la Proposición 5.0.3 podemos relacionar las envolturas de un subconjunto $K \subset E$ de la siguiente forma $\overline{\mathrm{co}(\mathrm{e}(K))} = ((K)^{\triangleright})^{\triangleleft} = {}^{\circ}((\mathrm{e}(K))^{\circ}) = Q(\mathrm{e}(K))$.
Veamos con esto que la definición que hemos dado de la propiedad ccp para grupos topológicos coincide en este caso con la de espacio vectorial.

Proposición 6.3.1 *Un espacio vectorial topológico E tiene la propiedad ccp como espacio si y sólo si la tiene como grupo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $K \subset E$ un compacto, $K \subseteq \mathrm{e}(K)$ que es también compacta.
Si E cumple la propiedad ccp como grupo topológico, $\overline{\mathrm{co}(\mathrm{e}(K))} = Q(\mathrm{e}(K))$ es compacta.
Recíprocamente, si E cumple la propiedad ccp como espacio vectorial topológico, la

envoltura casi-convexa de un compacto $Q(K) \subseteq Q(\mathrm{e}(K)) = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{e}(K))}$ es un cerrado dentro de un compacto y, por tanto, es también compacta. $\square$

Estudiemos primero algunos aspectos de la propiedad ccp en espacios localmente convexos que nos servirán de modelo para nuestro estudio posterior en grupos.

La propiedad ccp está muy ligada a la completitud, cómo demuestra el siguiente resultado de Ostling y Wilansky ([70] Theorem 5.3) que reproducimos aquí.

Proposición 6.3.2 *Sea X un espacio localmente convexo, metrizable. X tiene la ccp si y sólo si es completo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X tiene la ccp y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. $S := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es precompacto. Por [58] 21.10(3) todo precompacto de un metrizable localmente convexo está en la clausura equilibrada y convexa de una sucesión convergente a cero, digamos $N := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $S \subset (N^{\rhd})^{\lhd}$. Como por hipótesis $(N^{\rhd})^{\lhd}$ es compacta, obtenemos que $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ es compacto y por estar en un espacio métrico también es secuencialmente compacto. Luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ya que tiene una subsucesión convergente. Recíprocamente: sea $K \subset X$ compacto. Por estar en un localmente convexo, $\mathrm{co}(K)$ es precompacto ([78] II,4.3), i.e. la compleción $\widetilde{\mathrm{co}(K)}$ es compacta. Siendo X un espacio de Hausdorff y completo, obtenemos que $\overline{\mathrm{co}(K)} = \widetilde{\mathrm{co}(K)}$ es compacta. $\square$

Teorema 6.3.3 *Sea E un espacio vectorial localmente convexo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$J_E \colon E \to (E^*_{co})^*$ es sobre*
2. *La envoltura convexa, cerrada y equilibrada de todo subconjunto compacto de E es $\omega(E, E^*)$-compacta.*
3. *E tiene la propiedad ccp.*

Si E es completo, se verifican las propiedades 1., 2. y 3.

DEMOSTRACIÓN:

1. $\Rightarrow$ 2.) Sea $K \subset E$ compacto; $K^{\rhd} \in \mathcal{B}_{E^*_{co}}(0)$ y, por el teorema de Alaoglu-Bourbaki, $(K^{\rhd})^{\triangleright}$ es un compacto de $(E^*_{co})^*$ con la topología débil $\omega((E^*_{co})^*, E^*)$. El espacio

mencionado se puede identificar con $(E, \omega(E, E^*))$ teniendo en cuenta que J_E es una biyección por la hipótesis 1. y por ser E localmente convexo. Además la convergencia en ambos espacios es equivalente. Luego podemos afirmar que la envoltura convexa, equilibrada y cerrada de K, $(K^{\triangleright})^{\triangleleft} = J_E^{-1}((K^{\triangleright})^{\triangleright})$, es compacta en E con la topología débil $\omega(E, E^*)$.

2. $\Rightarrow$ 3.) Para un compacto cualquiera $K \subset E$ tenemos que $(K^{\triangleright})^{\triangleleft}$ es débilmente completo y por tanto completo en la topología de E ([58] 18.4(4)). Si vemos que es precompacto en E ya tendremos que es compacto en E.
Sabemos que en un espacio localmente convexo la envoltura convexa de todo precompacto es precompacta ([78] II,4.3), por tanto $\mathrm{co}(K)$ es precompacto, y asímismo lo es $\overline{\mathrm{co}(K)} = (K^{\triangleright})^{\triangleleft}$. Ahora tenemos que $(K^{\triangleright})^{\triangleleft}$ es completo y precompacto en la topología de E, luego compacto y E tiene la ccp.

3. $\Rightarrow$ 1.) Designemos por $\tau(E^*, E)$ la topología de Mackey en E^*, que es exactamente la $\mathfrak{S}$-topología para la familia $\mathfrak{S}$ de los $\omega(E, E^*)$-compactos, convexos y equilibrados de E. La condición ccp implica que la topología compacto-abierta τ_{co} en E^* es menos fina que $\tau(E^*, E)$. En efecto, un entorno básico de cero en τ_{co} viene dado como polar de un compacto $K \subset E$, sea $V = K^{\triangleright}$. Por tener E la ccp, la envoltura convexa, equilibrada y cerrada de K, digamos $H := \overline{\mathrm{co}(\mathrm{e}(K))}$, es compacta en E y, en particular, es $\omega(E, E^*)$-compacta. Así $H^{\triangleright}$ es $\tau(E^*, E)$-entorno de cero y $H^{\triangleright} \subseteq K^{\triangleright}$ implica que $K^{\triangleright}$ es $\tau(E^*, E)$-entorno de cero. Por tanto $\tau_{co} < \tau(E^*, E)$, y en consecuencia $(E^*_{co})^* \subset (E^*, \tau(E^*, E))^*$. Por el Teorema de Mackey Arens, $(E^*, \tau(E^*, E))^* = E$, luego $(E^*_{co})^*_{co}$ se puede identificar a E, i.e. J_E es sobre.

Probamos por último que si E es completo, se dan las condiciones 1., 2. y 3. En efecto, siendo E localmente convexo y completo, es BB-reflexivo ([24]), es decir $J'_E \colon E \to \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ es isomorfismo topológico. Ahora bien $\mathcal{L}\mathcal{L}_{co}E \subseteq \mathcal{L}\mathcal{L}_c E$ y, por tanto, J_E es también sobre. □

Corolario 6.3.4 *Si E_ω designa un espacio de Banach infinito dimensional, dotado de la topología débil correspondiente a las formas lineales continuas, entonces el encaje canónico $J_{E_\omega} \colon E_\omega \to ((E_\omega)^*_{co})^*$ es sobre.*

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que E_ω tiene la ccp ([88]II.C.8). □

Observaciones 19 Aunque la equivalencia entre 1. y 2. del Teorema 6.3.3 estaba probada en [8], hemos seguido ideas de V.Tarieladze para dar una demostración más simple de este hecho.

El Corolario pone de manifiesto que la hipótesis de metrizabilidad en la Proposición 6.3.2 no puede suprimirse en su totalidad. En efecto, siendo J_{E_ω} sobre, E_ω tiene la ccp y es un hecho conocido que un espacio de Banach infinito dimensional con su topología débil no es completo.

6.3.1 La propiedad ccp en grupos topológicos

En el contexto de los grupos el teorema análogo al 6.3.3, es decir el que resultaría sustituyendo espacio vectorial topológico por grupo topológico, formas lineales continuas por caracteres continuos y el concepto de localmente convexo por localmente casi-convexo, no es cierto en su totalidad, como veremos a continuación, aunque sí puede darse una aproximación al mismo.

Proposición 6.3.5 *Sea G un grupo topológico de Hausdorff localmente casi-convexo. Si se verifica una de las siguientes propiedades:*

1. *$\alpha_G\colon G \to G^{\wedge\wedge}$ es sobre*
2. *G es completo*

entonces G tiene la ccp.

Demostración: Por ser G localmente casi-convexo, α_G es inyectiva y abierta en la imagen, así $\alpha_G^{-1}\colon \alpha_G(G) \to G$ es continua.
Por otra parte, si $K \subset G$ es un compacto, tenemos que $K^o \in \mathcal{B}_{G^\wedge}(0)$ y K^{oo} es compacto en $G^{\wedge\wedge}$.

1. Si $\alpha_G\colon G \to G^{\wedge\wedge}$ es sobre, tenemos $\alpha_G^{-1}(K^{oo}) = {}^o(K^o) = Q(K)$ es compacto por ser imagen continua de un compacto en un Hausdorff.
2. Veamos ahora el caso en que G es completo. Se verifica ${}^o(K^o) = \alpha_G^{-1}(K^{oo} \cap \alpha_G(G))$ que es precompacto por ser imagen continua de un precompacto. Por otra parte, la envoltura casi-convexa es cerrada y, por estar en un completo, es completa. Luego, $Q(K)$, siendo precompacto y completo, es compacto. $\square$

Aunque las condiciones 1. y 2. separadamente implican que el grupo tenga la propiedad ccp, veamos con los siguientes ejemplos que son independientes.

Ejemplo 6.3.6 *El grupo metrizable, localmente casi-convexo, $G = L^2_{\mathbb{Z}}[0,1]$ no es Pontryagin reflexivo (Proposición 5.2.4), lo que demuestra que α_G no es sobre. Por otra parte G es un subgrupo cerrado de $L^2[0,1]$, que es completo. Luego G es completo.*

Ejemplo 6.3.7 *El espacio de Komura (Ejemplo 5.3.9) siendo un espacio vectorial localmente convexo reflexivo es reflexivo como grupo y, por tanto α_E es sobre y sin embargo no es completo.*

Estos mismos ejemplos prueban que la propiedad ccp para un grupo topológico G no implica que α_G sea sobre o que G sea completo.

En efecto el grupo G del Ejemplo 6.3.6 es completo, luego tiene la ccp, y no verifica 1. Análogamente, el espacio E del Ejemplo 6.3.7, no es completo y sin embargo α_E es sobre, por lo tanto tiene la ccp.

En resumen, la situación es que 1. y 2. $\Rightarrow$ (ccp), pero (ccp) $\not\Rightarrow$ 1. o 2. Si en vez de considerar el bidual en sentido Pontryagin, consideramos el bidual en sentido Binz Butzmann, se tiene:

Proposición 6.3.8 *Sea G un grupo topológico localmente casi-convexo. Entre las siguientes afirmaciones:*

1. $\kappa_G \colon G \to \Gamma_c\Gamma_c G$ *es sobre*
2. *G es completo*
3. *La envoltura casi-convexa de todo compacto es también compacta*

se dan las relaciones 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. *Pero* 3. $\not\Rightarrow$ 1. *y* 3. $\not\Rightarrow$ 2.

DEMOSTRACIÓN:

1. $\Rightarrow$ 2.) Si κ_G es sobre, por ser G localmente casi-convexo, es ya un isomorfismo bicontinuo, por tanto $G \cong \Gamma_c\Gamma_c G$ que es completo por ser el dual de un grupo de convergencia localmente compacto (Proposición 6.1.11).

2. $\Rightarrow$ 3.) Proposición 6.3.5 con la hipótesis 2.

Veamos ahora que las otras implicaciones no se dan.
El grupo G del Ejemplo 6.3.6 prueba también que 3. $\not\Rightarrow$ 1. ya que por ser α_G continua $\Gamma(G^\wedge)$ es subgrupo de $\Gamma(\Gamma_c G)$ y si α_G no es sobre, tampoco puede serlo κ_G.
Finalmente el Ejemplo 6.3.7 demuestra que 3. $\not\Rightarrow$ 2.. $\square$

Proposición 6.3.9 *Sea G un grupo topológico localmente casi-convexo. La envoltura casi-convexa de todo precompacto es precompacta.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $M \subset G$ un subconjunto precompacto. La compleción de G, $\tilde{G}$, es un grupo localmente casi-convexo ([12]) y se cumple $Q_G(M) \subseteq Q_{\tilde{G}}(M)$. A su vez, $\tilde{M}$ es compacto y $Q_{\tilde{G}}(M) \subseteq Q_{\tilde{G}}(\tilde{M})$. Así, $Q_{\tilde{G}}(\tilde{M})$ es un compacto (Proposición 6.3.5) que contiene a la compleción $\widetilde{Q_G(M)}$. Luego $\widetilde{Q_G(M)}$ es compacto y por tanto $Q_G(M)$ es precompacto. $\square$

Cuestión 2 *Si G es un grupo localmente casi-convexo metrizable, ¿ccp $\Rightarrow$ completo? Hemos visto que el recíproco es cierto sin necesidad de que el grupo sea metrizable. Sabemos que el análogo en espacios vectoriales también es cierto.*

6.3.2 Algunas clases de grupos con ccp

Proposición 6.3.10 *Si G es un grupo reflexivo, entonces G y $G^\wedge$ tienen la propiedad ccp.*

DEMOSTRACIÓN: Es corolario de la Proposición 6.3.5, teniendo en cuenta que α_G y $\alpha_{G^\wedge}$ son sobre. $\square$

También existen grupos no reflexivos que tienen la propiedad ccp (Corolario 6.3.4).

Proposición 6.3.11 *Si G es un grupo con α_G continua, entonces $G^\wedge$ verifica ccp. En particular, si G es metrizable, $G^\wedge$ verifica la ccp.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $K \subset G^\wedge$ compacto. Por ser α_G continua, K es equicontinuo. Entonces ${}^oK \in \mathcal{B}_G(0)$ y $({}^oK)^o$ es compacto en $G^\wedge$ ([68] 2.2). Y por ser la envoltura casi-convexa de K un cerrado contenido en $({}^oK)^o$, es también compacta. $\square$

Proposición 6.3.12 *Sea (G,τ) un grupo localmente casi-convexo con la propiedad ccp y sea τ' otra topología de grupo en G, localmente casi-convexa, con $\tau < \tau'$ y tal que el polar ${}^oH$ de todo equicontinuo de $(G,\tau')^\wedge$ es τ-cerrado. Entonces, (G,τ') tiene también la propiedad ccp.*

Demostración: Sea $K \subset G$ τ'-compacto. En particular K es τ-compacto y, por tener (G,τ) la propiedad ccp, su envoltura casi-convexa, $Q_\tau(K)$, es también τ-compacta. Entonces $Q_\tau(K)$ es τ-completo.

Sea $Q_{\tau'}(K)$ la envoltura casi-convexa de K en (G,τ'). Fácilmente se ve que $Q_{\tau'}(K) \subset Q_\tau(K)$.

La familia $\mathcal{B}'(0) := \{{}^oH : H \in (G,\tau')^\wedge$ es equicontinuo $\}$ constituye una base de entornos de 0 en τ', que por hipótesis son τ-cerrados. Así, aplicando la Proposición 4.3.9, $Q_\tau(K)$ es τ'-completo. Ahora $Q_{\tau'}(K)$ es τ'-cerrado dentro del completo $Q_\tau(K)$, luego es τ'-completo.

Además, la envoltura casi-convexa de todo precompacto, en un grupo localmente casi-convexo, es precompacta (Proposición 6.3.9) y por tanto lo es $Q_{\tau'}(K)$.

Luego $Q_{\tau'}(K)$ es compacto en τ'. $\square$

Observemos que por la Proposición 6.3.12, tener la propiedad ccp en ΓG con la topología $\omega(G^\wedge, G)$ es más exigente que tener la ccp en $G^\wedge$.

Proposición 6.3.13 *Si G es un grupo nuclear, metrizable, con α_G sobre, entonces $(G^\wedge, \omega(G^\wedge, G))$ verifica ccp.*

Demostración: Sea $K \subset G^\wedge_\omega$ compacto. Por [5](20.30) $G^\wedge$ es nuclear, y por [11], $G^\wedge$ verifica la propiedad de Glicksberg, es decir, todo $\omega(G^\wedge, G^{\wedge\wedge})$-compacto es compacto en $G^\wedge$. Siendo G reflexivo ([8] 17.3), la topología débil $\omega(G^\wedge, G^{\wedge\wedge})$ puede identificarse a $\omega(G^\wedge, G)$; por tanto K es también compacto en $G^\wedge$, y de α_G continua deducimos que K es equicontinuo. Luego ${}^oK \in \mathcal{B}_G(0)$ y $({}^oK)^o$ es $\omega(G^\wedge, G)$-compacto. La envoltura casi-convexa es un $\omega(G^\wedge, G)$-cerrado, contenido en $({}^oK)^o$, por tanto $\omega(G^\wedge, G)$-compacto (y además es compacto en $G^\wedge$). $\square$

En general, si G es un grupo nuclear, G^+ no verifica ccp (Ejemplo: G espacio vectorial nuclear, metrizable, no completo).

En [63] se afirma que un grupo G reflexivo admisible (i.e. tal que $e_G\colon G^\wedge \times G \to \mathbb{T}$ es continua) es necesariamente localmente compacto. La clase de grupos para la que es cierta esta afirmación contiene a los grupos con ccp, como demostramos a continuación:

Proposición 6.3.14 *Si G es un grupo topológico tal que la envoltura casi-convexa de un compacto es compacta y la aplicación evaluación $e_G \colon G^\wedge \times G \to \mathbb{T}$ es continua, entonces G es localmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea el entorno de 1 en $\mathbb{T}$, $W = \left\{e^{2\pi i t} : t \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]\right\}$. Por ser e_G continua, existe $K \subset G$ compacto y $V \in \mathcal{B}_G(0)$ tales que $e_G(K^o \times V) \subset W$. Es decir $V \subset {}^o(K^o)$. Si G cumple que la envoltura casi-convexa de un compacto es compacta, ${}^o(K^o)$ es compacto y $\overline{V}$ es un entorno compacto de cero en G. Luego G es localmente compacto. □

Corolario 6.3.15 *El grupo $\mathbb{Q}$ no tiene la ccp.*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que $e_{\mathbb{Q}}$ es continua (Ejemplo 4.5.5) y sin embargo $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto. □

Lo mismo ocurre para cualquier subgrupo denso de un grupo metrizable, localmente compacto.

La ccp no es hereditaria y además un grupo nuclear en general no tiene la ccp.

Veamos que mediante la ccp, el resultado de [63] se puede mejorar un poco para duales, i.e. si un grupo es un dual, se obtiene que la continuidad de la evaluación implica que el grupo sea localmente compacto, bajo unas hipótesis menos restrictivas.

Proposición 6.3.16 *Sea G un grupo topológico con α_G continua, entonces son equivalentes:*

a) $e_{G^\wedge}$ es continua

b) $G^\wedge$ es localmente compacto

DEMOSTRACIÓN:

a) $\Rightarrow$ b) Por ser α_G continua, $G^\wedge$ verifica la ccp (Proposición 6.3.11). Entonces, si $e_{G^\wedge}$ es continua, $G^\wedge$ es localmente compacto (Proposición 6.3.14).

b) $\Rightarrow$ a) Es obvio. □

Capítulo 7

Dualidad y reflexividad en grupos

Hemos visto en los Capítulos anteriores algunas propiedades del dual de convergencia de un grupo. Seguimos aquí con dicho estudio. Utilizaremos estas propiedades para estudiar la BB-reflexividad y compararla con la reflexividad en el sentido de Pontryagin.

Finalmente daremos una definición de BB-reflexividad fuerte.

En contraposición con lo que ocurre para los grupos topológicos localmente compactos y sus duales, tenemos que si H es un grupo de convergencia localmente compacto, en general $\Gamma_c H$ no es localmente compacto, como prueba el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.0.1 *Sea B un espacio de Banach infinito dimensional. $H := \Gamma_c B$ es localmente compacto, sin embargo $\Gamma_c H$ no lo es. En efecto, todo espacio de Banach es reflexivo en sentido Pontryagin ([80]) y, por otra parte, en todo grupo metrizable son equivalentes la reflexividad en sentido Pontryagin y la BB-reflexividad ([28]), esto nos da los siguientes isomorfismos topológicos $\Gamma_c H = \Gamma_c \Gamma_c B \cong B^{\wedge\wedge} \cong B$. Es obvio que B no es localmente compacto.*

7.1 Reflexividad en sentido Pontryagin y BB-reflexividad

Proposición 7.1.1 *Si G es un grupo de convergencia BB-reflexivo, todo subgrupo H de G dualmente cerrado y dualmente sumergido, es BB-reflexivo.*

Demostración: La aplicación $\kappa_H\colon H \to \Gamma_c\Gamma_c H$ es siempre continua. Y es inyectiva porque lo es κ_G, ya que G es BB-reflexivo. Consideramos ahora el siguiente diagrama commutativo

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_c\Gamma_c H & \xrightarrow{\Gamma\psi} & \Gamma_c(\Gamma_c G/H^o) \\ {\scriptstyle \kappa_H}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi^{H^o}} \\ H & \xrightarrow{\kappa_{G|H}} & H^{oo} \end{array}$$

Entonces, κ_H es sobre y κ_H^{-1} es continua, porque $\Gamma\psi$ es un homomorfismo continuo y Φ^{H^o} y $\kappa_{G|H}$ son isomorfismos bicontinuos. □

El ejemplo de Leptin de un subgrupo cerrado, no reflexivo de un producto de grupos discretos [61], demuestra que hay subgrupos dualmente cerrados y sumergidos de grupos reflexivos en sentido Pontryagin que no son reflexivos. Así pues el análogo a la Proposition 7.1.1 en la reflexividad de Pontryagin no se verifica.

Hacemos, ahora, un estudio comparativo de propiedades relacionadas con la reflexividad de un grupo topológico en el sentido ordinario, de Pontryagin, y sus análogas en relación a la BB-reflexividad. En [29] se establece que en general no son comparables ambos conceptos de reflexividad. Podemos precisar que la clase de los grupos topológicos donde coinciden las dos reflexividades contiene a los localmente compactos y a los metrizables.

En el Teorema 6.2.2 hemos visto que los biduales de un grupo topológico coinciden si y sólo si α_G es continua y $G^\wedge$ es un $\mathrm{k}_{\mathbb{T}}$-grupo, como consecuencia de esto obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 7.1.2 *a) Los grupos Čech completos son BB-reflexivos si y sólo si son reflexivos en sentido Pontryagin.*

b) La suma directa de grupos topológicos localmente compactos es BB-reflexivo.

Demostración:

a) Sea G un grupo Čech completo. Se comprueba directamente usando la definición que G es un k-grupo, por tanto α_G es continua ([68]).
Por otra parte, $G^\wedge$ es también k-grupo. En efecto, por ser G Čech completo, existe un subgrupo compacto $K \subset G$ tal que G/K es metrizable y completo. Entonces $(G/K)^\wedge$ es k-espacio; en particular es k-grupo, y $(G/K)^\wedge \cong K^o$ ([8] (14.1)). Siendo K^o un subgrupo abierto de $G^\wedge$, obtenemos por [68] que $G^\wedge$ es k-grupo. Luego las reflexividades coinciden (Teorema 6.2.2).

b) Es conocido que los productos y las sumas directas de grupos localmente compactos son reflexivos en sentido Pontryagin ([51]), siendo el dual de la suma directa de grupos topológicos, topológicamente isomorfo al producto de los duales de dichos grupos y recíprocamente. Por otra parte, el producto de grupos localmente compactos es k-grupo. Así, aplicando de nuevo el Teorema 6.2.2 concluimos que la suma directa de grupos localmente compactos es BB-reflexivo.

□

Observación 20 *Para espacios vectoriales localmente convexos, la BB-reflexividad es equivalente a la completitud, sin embargo el resultado análogo para grupos localmente casi-convexos no es cierto, como prueba el ejemplo $G = L^2_{\mathbb{Z}}[0,1]$ (cfr. Ejemplo 6.1.10).*

Denotemos por $C_{co}(X)$ el espacio localmente convexo de las funciones continuas de un espacio topológico X en $\mathbb{R}$, con la topología compacto-abierta. Si X es un espacio compacto, entonces $C_{co}(X)$ y $C_{co}(X, \mathbb{T})$ son grupos metrizables, reflexivos en ambos sentidos.

Un espacio topológico es Nachbin-Shirota si y sólo si $C_{co}(X)$ es tonelado. La clase de los espacios topológicos Nachbin-Shirota contiene a todos los paracompactos pero no a los localmente compactos (cfr. [5]).

Proposición 7.1.3 *Sea X un espacio topológico completamente regular, entonces $C_{co}(X)$ es BB-reflexivo si y sólo si X es $k_{\mathbb{R}}$-espacio.*

Demostración: Basta tener en cuenta que $C_{co}(X)$ es completo si y sólo si X es $k_{\mathbb{R}}$-espacio ([62] Proposición XIII.4.5). □

Proposición 7.1.4 *Si X es Nachbin-Shirota y $k_{\mathbb{R}}$-espacio, entonces $C_{co}(X)$ es reflexivo en sentido Pontryagin. En particular, si X es hemicompacto y $k_{\mathbb{R}}$-espacio, $C_{co}(X)$ es Pontryagin reflexivo.*

Demostración: Por ser X un $k_{\mathbb{R}}$-espacio, $C_{co}(X)$ es BB-reflexivo. Basta ver que $\alpha_{C_{co}(X)}$ es continua y esto se cumple por ser X Nachbin-Shirota. □

Ejemplo 7.1.5 *$C(\mathbb{Q})$ con la topología compacto-abierta es espacio vectorial topológico, localmente convexo, no metrizable que es BB-reflexivo, ya que es completo por ser $\mathbb{Q}$ $k_{\mathbb{R}}$-espacio y es, además, reflexivo en sentido Pontryagin porque $\mathbb{Q}$ es Nachbin-Shirota.*
$C(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$ con la topología compacto-abierta es un grupo topológico localmente casi-convexo, no metrizable, que es también reflexivo en los dos sentidos. En efecto, utilizamos que $C(\mathbb{Q}, \mathbb{T})^\wedge$ es el grupo libre engendrado por $\mathbb{Q}$ ([44]).

7.2 BB-reflexividad de los subgrupos abiertos

En [10] se demuestra que los subgrupos abiertos de un grupo topológico abeliano determinan el comportamiento del grupo respecto de la reflexividad. Vamos a estudiar aquí esta propiedad para la BB-reflexividad. Ya vimos en la sección 3.3 que todo subgrupo abierto de un grupo de convergencia es dualmente cerrado y dualmente sumergido, y que toda red convergente de caracteres continuos definidos en un subgrupo abierto, se puede elevar a una red convergente definida en todo el grupo. Usaremos ahora estas propiedades.

Teorema 7.2.1 *Sea A un subgrupo abierto de un grupo de convergencia de Hausdorff G. Entonces G es BB-reflexivo si y sólo si A es BB-reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\kappa_G\colon G \to \Gamma_c\Gamma_c G$ y $\kappa_A\colon A \to \Gamma_c\Gamma_c A$ las inmersiones canónicas en el bidual. Por la definición de la estructura de la convergencia continua, estas aplicaciones, κ_G y κ_A, son siempre continuas.

$\Longrightarrow$) Supongamos que G es BB-reflexivo, queremos ver que κ_A es un isomorfismo de grupos de convergencia.

1. κ_A es inyectiva.
   Sea $a \neq b$ en A. Por ser G BB-reflexivo, tiene suficientes caracteres continuos, y podemos encontrar $\chi \in \Gamma_c G$ tal que $\chi(a) \neq \chi(b)$. Entonces $\kappa_A(a)(\chi_{|A}) = \chi_{|A}(a) \neq \chi_{|A}(b) = \kappa_A(b)(\chi_{|A})$.
2. κ_A es suprayectiva.
   Sea $i\colon A \to G$ la inclusión natural. El siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & G \\ \kappa_A \downarrow & & \downarrow \kappa_G \\ \Gamma_c\Gamma_c A & \xrightarrow{\Gamma\Gamma i} & \Gamma_c\Gamma_c G \end{array}$$

es commutativo. Por ser κ_G suprayectiva, para cada $\chi \in \Gamma_c\Gamma_c A$, existe $g \in G$ tal que $\Gamma\Gamma i(\chi) = \kappa_G(g)$. Basta ver que $g \in A$, ya que entonces $\kappa_A(g) = \chi$, porque A es dualmente sumergido y por tanto $\Gamma\Gamma i$ es inyectiva. Supongamos que $g \notin A$; como A es dualmente cerrado, existe $\beta \in \Gamma_c G$ tal que $\beta(A) = 0$ y $\beta(g) \neq 0$. Entonces $(\Gamma\Gamma i(\chi))(\beta) = \chi(\Gamma i(\beta)) = \chi(\beta_{|A}) = 0$, pero por otra parte $(\Gamma\Gamma i(\chi))(\beta) = (\kappa_G(g))(\beta) = \beta(g) \neq 0$, y llegamos a una contradicción.

3. κ_A^{-1} es continua.
Consideramos una red convergente en $\Gamma_c\Gamma_c A$. La podemos tomar de la forma $\kappa_A(x_\alpha)$ para alguna red $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ en A, y designamos como $\kappa_A(x)$ al límite. Vamos a demostrar que (x_α) converge a x en A. Ya que $\Gamma\Gamma i$ es continua, $\kappa_G(x_\alpha) = \kappa_G i(x_\alpha) = \Gamma\Gamma i \kappa_A(x_\alpha) \to \Gamma\Gamma i \kappa_A(x) = \kappa_G i(x) = \kappa_G(x)$ y, como κ_G^{-1} es también continua, $x_\alpha \to x$.

$\Longleftarrow$) Supogamos ahora que κ_A es un isomorfismo bicontinuo.

1. κ_G es inyectiva.
Sean $g, g' \in G$ con $g \neq g'$. Distinguiremos dos casos:
Si $g - g' \notin A$, consideramos $[g-g'] \neq [0]$ en G/A. Como G/A es discreto, tiene suficientes caracteres continuos y podemos encontrar $\chi \in \Gamma_c(G/A)$ tal que $\chi[g] \neq \chi[g']$. Consideramos $\chi p \in \Gamma_c G$, donde $p\colon G \to G/A$, y entonces $(\kappa_G(g))(\chi p) = \chi p(g) = \chi[g] \neq \chi[g'] = (\kappa_G(g'))(\chi p) \Rightarrow \kappa_G(g) \neq \kappa_G(g')$.
Si $g - g' \in A$, sea $\beta \in \Gamma A$ tal que $\beta(g-g') \neq 0$. Como A es dualmente cerrado, β se puede extender a un carácter $\tilde\beta \in \Gamma_c G$. Así $\tilde\beta(g) \neq \tilde\beta(g')$ y $\kappa_G(g) \neq \kappa_G(g')$.

2. κ_G es suprayectiva.
Consideremos el siguiente diagrama commutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
A & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{p} & G/A \\
\kappa_A \downarrow & & \kappa_G \downarrow & & \downarrow \kappa_{G/A} \\
\Gamma_c\Gamma_c A & \xrightarrow{\Gamma\Gamma i} & \Gamma_c\Gamma_c G & \xrightarrow{\Gamma\Gamma p} & \Gamma_c\Gamma_c(G/A)
\end{array}$$

donde $\kappa_{G/A}$ es suprayectiva porque G/A es discreto y p es también suprayectiva.
Si $\chi \in \Gamma_c\Gamma_c G$, existe $g \in G$ tal que $\Gamma\Gamma p(\chi) = \kappa_{G/A}([g]) = \kappa_{G/A}p(g) = \Gamma\Gamma p \kappa_G(g)$. Entonces $\Gamma\Gamma p(\chi - \kappa_G(g)) = 0$, y así $\chi - \kappa_G(g) \in \mathrm{Ker}\ \Gamma\Gamma p$.
Basta demostrar que $\mathrm{Ker}\ \Gamma\Gamma p \subseteq \mathrm{Im}\ \Gamma\Gamma i$ porque entonces $\chi - \kappa_G(g) = \Gamma\Gamma i(\kappa_A(a)) = \kappa_G i(a)$, para algún $a \in A$. Y así $\chi = \kappa_G(g+a)$ con $g + a \in G$.

Para probar Ker $\Gamma\Gamma p \subseteq$ Im $\Gamma\Gamma i$, veamos que, para cada $\varphi \in$ Ker $\Gamma\Gamma p$, existe un carácter ψ en $\Gamma_c\Gamma_c A$ que hace commutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_c G & \overset{\Gamma i}{\to} & \Gamma_c A \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ \mathbb{T} & & \end{array}$$

y así $\Gamma\Gamma i(\psi) = \varphi$.
Para cada $\xi \in \Gamma_c A$, existe $\tilde{\xi} \in \Gamma_c G$ tal que $\Gamma(\tilde{\xi}) = \xi$. Definimos $\psi(\xi) := \varphi(\tilde{\xi})$ que hace commutativo el diagrama. Está bien definida, porque $\Gamma i(\tilde{\xi}) = \Gamma i(\tilde{\xi'})$ $\Rightarrow \tilde{\xi} - \tilde{\xi'} \in$ Ker Γi =Im Γp. Si $\chi \in \Gamma_c(G/A)$ es tal que $\Gamma p(\chi) = \tilde{\xi} - \tilde{\xi'}$, tenemos $\varphi(\tilde{\xi} - \tilde{\xi'}) = \varphi(\Gamma p \chi) = \Gamma\Gamma p \varphi(\chi) = 0$, es decir, $\varphi(\tilde{\xi}) = \varphi(\tilde{\xi'})$.
La continuidad de ψ se deduce de la Proposition 3.3.9. Sea $\xi_\alpha \to \xi$ en $\Gamma_c A$ y tomamos sus extensiones $\tilde{\xi_\alpha}$, $\tilde{\xi}$ en $\Gamma_c G$, tal que $\tilde{\xi_\alpha} \overset{\Lambda}{\to} \tilde{\xi}$. Entonces, $\psi(\xi_\alpha) = \psi\Gamma i(\tilde{\xi_\alpha}) = \varphi(\tilde{\xi_\alpha}) \to \varphi(\tilde{\xi}) = \psi\Gamma i(\tilde{\xi}) = \psi(\xi)$.

3. κ_G^{-1} es continua.
   Basta ver que $(\kappa_{G_{|A}})^{-1}$ es continua. Sea $\kappa_G(h_\alpha) \to \kappa_G(h)$, una red convergente en $\Gamma_c\Gamma_c G$ con $(h_\alpha)_{\alpha\in D} \subset A$. Por ser A dualmente cerrado, $h \in A$. Queremos demostrar que $h_\alpha \to h$, pero esto es equivalente a $\kappa_A(h_\alpha) \to \kappa_A(h)$, por ser κ_A un isomorfismo bicontinuo.
   Si $(\chi_\beta)_{\beta\in E}$ es una red en $\Gamma_c A$ con $\chi_\beta \to \chi$, por la Proposición 3.3.9 podemos elevarla a una red convergente en $\Gamma_c G$. Es decir, existen $\tilde{\chi_\beta}$, $\tilde{\chi}$ tal que $\Gamma i(\tilde{\chi_\beta}) = \chi_\beta$, $\Gamma i(\tilde{\chi}) = \chi$ y $\tilde{\chi_\beta} \to \tilde{\chi}$. Tenemos ahora $\kappa_A(h_\alpha)(\chi_\beta) = \Gamma\Gamma i \kappa_A(h_\alpha)(\tilde{\chi_\beta}) = \kappa_G(h_\alpha)(\tilde{\chi_\beta}) \to \kappa_G(h)(\tilde{\chi}) = \Gamma\Gamma i \kappa_A(h)(\tilde{\chi}) = \kappa_A(h)(\chi)$. Y entonces $\kappa_A(h_\alpha) \to \kappa_A(h)$ como queríamos.

$\square$

7.2.1 Aplicaciones

Mencionamos ahora dos clases importantes de grupos de convergencia que, en sendos trabajos ([16] y [26]), ha sido probado que son BB-reflexivos. De hecho la técnica común que emplean para ello es considerar un destacado subgrupo abierto y ver que éste es BB-reflexivo. Después, haciendo todos los cálculos ad casum, se llega a que el grupo de partida es también BB-reflexivo. Estos cálculos se pueden evitar con nuestro resultado (Teorema 7.2.1) que es abstracto y por tanto general.

En primer lugar, en [26] se considera el grupo de las funciones continuas definidas en un espacio topológico compacto X, con valores en el toro S^1, dotado de la estructura de la convergencia continua, $C_c(X, S^1)$. Dentro de este grupo se destaca el conjunto de las funciones que son proyección de funciones reales continuas: es decir, si ρ designa la proyección recubridora de $\mathbb{R} \to S$ definida por $r \to e^{2\pi i r}$, y $C_c(X)$ las funciones reales continuas en X, $\rho_X C_c(X) := \{\rho f : f \in C_c(X)\}$ constituye un subgrupo abierto, BB-reflexivo de $C_c(X, S^1)$. Este hecho deriva fácilmente del resultado de que $C_c(X)$ es reflexivo, obtenido por el mismo autor. Por tanto, podemos concluir directamente que $C_c(X, S^1)$ es también BB-reflexivo.

En [16] se demuestra la BB-reflexividad de los grupos $C^k(M, S^1)$, formados por las funciones de clase C^k definidas en una variedad compacta y conexa M de clase C^∞, dotados de la topología de la convergencia uniforme en todas las k-derivadas. Para ello se considera el grupo de las funciones reales de clase C^k, definidas en la variedad M, $C^k(M)$, dotado de la C^k-topología y se pasa al cociente $C^k(M)/C^k_{\mathbb{Z}}(M)$, donde $C^k_{\mathbb{Z}}(M)$ designa las funciones de $C^k(M)$ que sólo toman valores enteros. Después se comprueba que dicho cociente se puede identificar a $\rho_M(C^k(M))$, que es un subgrupo abierto de $C^k(M, S^1)$ y se estudia su BB-reflexividad. De nuevo, aplicando nuestro resultado, se obtiene ya la BB-reflexividad de $C^k(M, S^1)$.

7.3 BB-reflexividad de los cocientes

En [10] se estudia el comportamiento de los cocientes de Hausdorff de grupos topológicos, respecto a la reflexividad de Pontryagin. Vamos a ver aquí que se verifican resultados análogos a los obtenidos en el Teorema 2.6 de [10] para la BB-reflexividad. Además se puede prescindir de una hipótesis en el citado Teorema.

Teorema 7.3.1 *Sea K un subgrupo compacto de un grupo topológico de Hausdorff G, con suficientes caracteres continuos. Entonces G es BB-reflexivo si y sólo si G/K es BB-reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN:

$\Longrightarrow$) En esta implicación no es necesario que G sea topológico.

Si G es BB-reflexivo, es isomorfo a $\Gamma_c\Gamma_c G$ y, si K es compacto, por la Proposición 3.3.4, $\kappa_G(K) = K^{oo}$. Por tanto podemos identificar G/K con $\Gamma_c\Gamma_c G/K^{oo}$.
Por el Teorema 7.2.1 se tiene que K^o es BB-reflexivo ya que es un subgrupo abierto del grupo BB-reflexivo $\Gamma_c G$. También lo es su dual $\Gamma_c K^o$.
Además, por el Corolario 3.3.10, la aplicación natural $\Psi_{K^o}\colon \Gamma_c\Gamma_c G/K^{oo} \to \Gamma_c K^o$ es un isomorfismo bicontinuo. Así, G/K es isomorfo al grupo BB-reflexivo $\Gamma_c K^o$.

$\Longleftarrow$)

1. κ_G es inyectiva porque G tiene suficientes caracteres continuos.

2. κ_G es suprayectiva.
   Consideremos el diagrama commutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{p} & G/K & \longrightarrow & 0 \\ & & \kappa_K \downarrow & & \kappa_G \downarrow & & \downarrow \kappa_{G/K} & & \\ & & \Gamma_c\Gamma_c K & \xrightarrow{\Gamma\Gamma i} & \Gamma_c\Gamma_c G & \xrightarrow{\Gamma\Gamma p} & \Gamma_c\Gamma_c(G/K) & & \end{array}$$

   Sea $\chi \in \Gamma_c\Gamma_c G$, por ser $\kappa_{G/H}$ isomorfismo, existe $g \in G$ tal que $\Gamma\Gamma p(\chi) = \kappa_{G/H}(p(g))$ y por tanto $\Gamma\Gamma p(\chi - \kappa_G(g)) = 0$. Si se cumple que Ker $\Gamma\Gamma p \subseteq$ Im $\Gamma\Gamma i$, entonces existe $\psi \in \Gamma_c\Gamma_c K$ tal que $\Gamma\Gamma i(\psi) = \chi - \kappa_G(g)$. Como K es subgrupo compacto, κ_K es isomorfismo, y se puede determinar $z \in K$ con $\kappa_K(z) = \psi$. Así $\chi - \kappa_G(g) = \Gamma\Gamma i(\psi) = \Gamma\Gamma i(\kappa_K(z)) = \kappa_G i(z) = \kappa_G(z)$ implica $\chi = \kappa_G(z - g)$.

   Veamos ahora que Ker $\Gamma\Gamma p \subseteq$ Im $\Gamma\Gamma i$. Sea $\varphi \in$ Ker $\Gamma\Gamma p$; definimos ψ de forma que haga commutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_c G & \xrightarrow{\Gamma i} & \Gamma_c K \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ \mathbb{T} & & \end{array}$$

   y así tendremos $\Gamma\Gamma i\psi = \psi\Gamma i = \varphi$.
   Dado $\xi \in \Gamma_c K$, consideremos $\tilde{\xi}$ una extensión a $\Gamma_c G$ y definimos $\psi(\xi) := \varphi(\tilde{\xi})$. Se ve que está bien definida de la misma forma que en el Teorema 7.2.1. Y como $\Gamma_c K$ es discreto, ψ es continua.

3. κ_G^{-1} es continua.
   Sea $(g_\alpha)_{\alpha\in D}$ una red en G tal que $\kappa_G(g_\alpha) \to 0$. Entonces $\kappa_{G/K}p(g_\alpha) = \Gamma\Gamma p\kappa_G(g_\alpha) \to 0$ y, como estamos suponiendo que $\kappa_{G/K}$ es isomorfismo bicontinuo, $p(g_\alpha) \to 0$.
   Por el Teorema 1.7.1, para $0 \in K$, existe $h_\beta \to 0$ con $p(h_\beta) = p(g_{\alpha_\beta})$ y $(g_{\alpha_\beta})_{\beta\in D'}$ subred de $(g_\alpha)_{\alpha\in D}$. Tenemos así que $h_\beta - g_{\alpha_\beta} \in K$ que es compacto, luego existe una subred $h_\gamma - g_\gamma$ convergente a $k \in K$. Veamos que k es 0.
   Si $k \neq 0$, tomamos un carácter $\xi \in \Gamma_c G$ tal que $\xi(k) \neq 1$. Entonces $\xi(h_\gamma - g_\gamma) \to \xi(k) \neq 1$, y $\xi(h_\gamma) \to 1$ implica $\xi(g_\gamma) \to \xi(k) \neq 1$. Por otra parte $\xi(g_\gamma) = \kappa_G(g_\gamma)(\xi)$ y, por hipótesis $\kappa_G(g_\gamma) \to 0$, con lo que llegamos a una contradicción.
   Tenemos pues que $g_\gamma \to 0$.

Este mismo argumento lo podemos repetir para todas las subredes de $(g_\alpha)_{\alpha\in D}$ y obtenemos que toda subred de $(g_\alpha)_{\alpha\in D}$ tiene una subred convergente a 0 y así, como en G se verifica el axioma de Urysohn, $(g_\alpha)_{\alpha\in D}$ converge a 0. $\square$

7.4 Reflexividad fuerte

La definición de grupo topológico fuertemente reflexivo (en sentido Pontryagin), que aparece en [20] y que puede ser simplificada de acuerdo con ([8] 17.1), es la siguiente: un grupo topológico reflexivo G es *fuertemente reflexivo* si cada subgrupo cerrado y cada cociente de Hausdorff de G y de $G^\wedge$ son reflexivos. Demostraremos que en el marco de la BB-reflexividad de grupos de convergencia se puede dar una definición todavía más simple.

Diremos que un grupo G de convergencia BB-reflexivo es *fuertemente BB-reflexivo* si los cocientes G/H y $\Gamma_c G/L$ son BB-reflexivos para todos los subgrupos cerrados H y L de G y de $\Gamma_c G$ respectivamente.

Para justificar esta definición demostraremos en la Proposición 7.4.1 que las condiciones requeridas en la definición implican que también los subgrupos cerrados de G y de $\Gamma_c G$ son BB-reflexivos. Esto es debido a que el isomorfismo $\Phi^H\colon \Gamma_c(G/H) \to H^o$, siendo G grupo de convergencia y H subgrupo cerrado, es automáticamente bicontinuo (Proposición 3.0.3). Sin embargo, el isomorfismo $\varphi^H\colon (G/H)^\wedge \to H^o$, en general, no tiene inverso continuo.

Teorema 7.4.1 *Si G es un grupo de convergencia fuertemente BB-reflexivo, entonces:*

a) Los subgrupos cerrados de G son dualmente cerrados.

b) Para cada subgrupo cerrado H de G, los homomorfismos $\Phi^H\colon \Gamma_c(G/H) \to H^o$, $\phi := {\kappa_{G|H}}^{-1} \circ \Phi^{H^o}\colon \Gamma_c(\Gamma_c G/H^o) \to H$ y $\Psi_H\colon \Gamma_c G/H^o \to \Gamma_c H$ son isomorfismos bicontinuos.

c) Los subgrupos cerrados de G son dualmente sumergidos.

d) Los subgrupos cerrados de G son BB-reflexivos.

e) $\Gamma_c G$ es fuertemente BB-reflexivo. Y, por tanto, satisface a), b), c) y d).

DEMOSTRACIÓN:

a) Por ser G fuertemente BB-reflexivo, para cada subgrupo cerrado H de G, el cociente G/H es BB-reflexivo y, por tanto, tiene suficientes caracteres continuos. Luego, H es dualmente cerrado.

b) Φ^H y Φ^{H^o} son siempre isomorfismos bicontinuos (Proposition 3.0.3).

Consideramos ahora el homomorfismo $\phi = {\kappa_{G|H}}^{-1} \circ \Phi^{H^o}$. Hemos visto en el apartado anterior que H es dualmente cerrado y G es BB-reflexivo por hipótesis, entonces $\kappa_{G|H}\colon H \to H^{oo}$ es isomorfismo bicontinuo (Proposición 3.0.2), luego ϕ también lo es.

Finalmente, consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_c G/H^o & \xrightarrow{\kappa_{\Gamma_c G/H^o}} & \Gamma_c\Gamma_c(\Gamma_c G/H^o) \\ {\scriptstyle \Psi_H}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \Gamma\Phi^{H^o}} \\ \Gamma_c H & \xleftarrow[\Gamma\kappa_{G|H}]{} & \Gamma_c H^{oo} \end{array}$$

donde $\kappa_{\Gamma_c G/H^o}$, $\Gamma\Phi^{H^o}$ y $\Gamma\kappa_{G|H}$ son isomorfismos bicontinuos, y así obtenemos que Ψ_H es isomorfismo bicontinuo.

c) Para cada carácter χ en $\Gamma_c H$, por el último isomorfismo bicontinuo del apartado b), $\Psi_H^{-1}(\chi)$ define un carácter en $\Gamma_c G/H^o$ que compuesto con la proyección $p\colon \Gamma_c G \to \Gamma_c G/H^o$, nos da un carácter en $\Gamma_c G$ que extiende a χ.

d) Por a) y c) respectivamente, todos los subgrupos cerrados de G son dualmente cerrados y dualmente sumergidos. Entonces, la Proposición 7.1.1, nos dice que son BB-reflexivos.

e) Por ser G fuertemente BB-reflexivo, $\Gamma_c G$ y sus cocientes son BB-reflexivos. Y las condiciones en su dual, $\Gamma_c\Gamma_c G$, se cumplen porque es isomorfo a G. $\square$

Los grupos topológicos localmente compactos son fuertemente reflexivos en sentido Pontryagin y también son fuertemente BB-reflexivos. Los siguientes teoremas demuestran que hay grupos topológicos fuertemente BB-reflexivos que no son localmente compactos.

Teorema 7.4.2 *Sea $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de grupos topológicos localmente compactos. Entonces $G = \prod G_n$ es fuertemente BB-reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN: En [8](17.3), se demuestra que G es Pontryagin fuertemente reflexivo, entonces, para todo subgrupo cerrado H de G, el cociente G/H es Čech completo y Pontryagin reflexivo, y por 7.1.2 BB-reflexivo.

Sea L un subgrupo cerrado de $\Gamma_c G$. Por ser $G^\wedge$ k-espacio, τ_{co} es la topología asociada a la estructura de la convergencia continua y L es un subgrupo cerrado de $G^\wedge$. Además G es Pontryagin fuertemente reflexivo, entonces L es dualmente cerrado y existe un subgrupo cerrado H de G tal que $H^o = L$ ([8](14.2)). Veamos que $\Gamma_c G/H^o$ es BB-reflexivo.

El grupo de convergencia $\Gamma_c G$ es localmente compacto y también lo son sus cocientes (Proposición 1.3.8). Entonces $\Gamma_c(\Gamma_c G/H^o)$ es topológico y tiene la topología compacto-abierta (Proposición 3.2.5). Por otra parte, el grupo topológico asociado a $\Gamma_c G/H^o$ es $G^\wedge/H^o$ (Proposición 1.4.2) y entonces los caracteres continuos son los mismos (Proposición 1.4.1), $\Gamma(\Gamma_c G/H^o) = \Gamma(G^\wedge/H^o)$.
Tenemos los siguientes isomorfismos bicontinuos $\Gamma_c(\Gamma_c G/H^o) \cong H^{oo} = \kappa_G(H) \cong H$ y $\psi : \Gamma_c G/H^o \to \Gamma_c H$ es un isomorfismo continuo, ya que H es dualmente sumergido. Teniendo en cuenta el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_c G/H^o & \xrightarrow{\kappa_{\Gamma_c G/H^o}} & \Gamma_c\Gamma_c(\Gamma_c G/H^o) \\
\psi\big\downarrow & & \big\uparrow \Gamma\varphi^{H^o} \\
\Gamma_c H & \xleftarrow[\Gamma\kappa_{G|H}]{} & \Gamma_c H^{oo}
\end{array}$$

basta ver que ψ^{-1} es continuo. Para ello, por ser $\Gamma_c H$ localmente compacto, sólo es necesario demostrar que la restricción de ψ^{-1} a cada subconjunto compacto de $\Gamma_c H$ es continua (Proposición 1.5.4).

Sea C un subconjunto compacto de $\Gamma_c H$ y sean $i : H \to G$ la inclusión y $p : \Gamma_c G \to \Gamma_c G/H^o$ la proyección canónica; C es topológico y equicontinuo. Entonces, en [8](8.2) se demuestra que existe un conjunto equicontinuo E en ΓG tal que $\Gamma i(E) = C$. Sea $\bar{E}$ la τ_{co}-clausura de E; $\bar{E}$ es τ_{co}-cerrado y equicontinuo, por tanto es compacto en $G^\wedge$. Siendo α_G continua, $\bar{E}$ es también compacto en $\Gamma_c G$. Consecuentemente $p(\bar{E})$ es compacto en $\Gamma_c G/H^o$. Y, ya que $\psi^{-1}(C) \subset \psi^{-1}(\Gamma i(\bar{E})) = p(\bar{E})$ y $\psi^{-1}(C)$ es cerrado en $\Gamma_c G/H^o$, tenemos que $\psi^{-1}(C)$ es compacto en $\Gamma_c G/H^o$.

Veamos ahora que $\psi^{-1}(C)$ es topológico:
El conjunto $K = \bar{E}$ es topológico y compacto en $G^\wedge = \sum G_n^\wedge$; así pues, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset G_1^\wedge + G_2^\wedge + \ldots + G_n^\wedge =: G^n$ y $p(K) \subset p(G^n)$ que es topológicalmente isomorfo a $G^n/G^n \cap H^o$. Veamos que la topología que $G^n/G^n \cap H^o$ hereda de $\Gamma_c G/H^o$ es la topología cociente natural. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en $G^n/G^n \cap H^o$ convergente a $[x]$ en

la topología cociente, $q : G^n \to G^n/G^n \cap H^o$ la proyección canónica y $\mathcal{H}$ un filtro en G^n convergente a $x \in q^{-1}([x])$ tal que $q(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}$. Si $\mathcal{L}$ converge a y en $G = \prod G_n$, $\mathcal{H}(\mathcal{L}) \to x(y)$, ya que $\mathcal{H}$ es un filtro convergente a x en $G^n = G_1^\wedge + G_2^\wedge + \ldots + G_n^\wedge$; pero además $\mathcal{H} \to x$ en $\Gamma_c G$, luego $\mathcal{F} \to [x]$ en $\Gamma_c G/H^o$.

Hemos visto que para todo compacto C de $\Gamma_c H$, $\psi^{-1}(C)$ es compacto y topológico. Entonces, el isomorfismo continuo $\psi : \psi^{-1}(C) \to C$ es un isomorfismo topológico y $\psi_{|C}^{-1}$ es continuo. □

Para la clase de los grupos nucleares tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.4.3 *Todo grupo nuclear, metrizable y completo es fuertemente BB-reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN: Por [8](17.3), todo grupo nuclear, metrizable y completo G es Pontryagin fuertemente reflexivo. Entonces, para cada subgrupo cerrado H de G, H y G/H son Pontryagin reflexivos y, por ser metrizables, son también BB-reflexivos ([28]).

El dual de convergencia de un grupo BB-reflexivo es BB-reflexivo, así $\Gamma_c G$ y $\Gamma_c H$ son BB-reflexivos.

Sea L un subgrupo cerrado de $\Gamma_c G$. Siendo τ_{co} la topología asociada a la estructura de la convergencia continua, L es un subgrupo cerrado de $G^\wedge$. Razonando como en la demostración del Teorema 7.4.2, existe un subgrupo cerrado H de G tal que $H^o = L$. Usando ahora que $\Gamma_c G/H^o$ es bicontinuamente isomorfo a $\Gamma_c H$ ([27]), obtenemos que $\Gamma_c G/H^o$ es BB-reflexivo. □

7.5 Propiedades X1 y X2

En el contexto de los espacios localmente convexos uno de los resultados más importantes es el Teorema de Hahn-Banach, con sus múltiples consecuencias. Por ejemplo: todo espacio localmente convexo tiene suficientes funcionales lineales para separar puntos; todo subespacio cerrado de un espacio localmente convexo es débilmente cerrado y todo funcional lineal continuo definido en un subespacio de un espacio localmente convexo se extiende a funcional lineal continuo definido en todo el espacio.

Si nos situamos ahora en el marco de los espacios vectoriales topológicos, estas propiedades ya no se verifican en general, y cabe hacer las siguientes definiciones, ya conocidas en la literatura.

Sea E un espacio vectorial topológico y $M \subset E$ un subespacio lineal cerrado.

Se dice que M *tiene la propiedad de extensión de Hahn-Banach* (HBEP) si todo funcional lineal continuo definido en M se extiende a E. El espacio E *tiene la propiedad de extensión de Hahn-Banach* (HBEP) si todo subespacio cerrado tiene dicha propiedad.

Diremos que M es un *subespacio débilmente cerrado* si para cada $x \notin M$ existe un funcional lineal continuo $f \in E^*$ tal que $f(x) \neq 0$ y $f(M) = \{0\}$.

A continuación estudiamos algunas relaciones esenciales entre estos conceptos. Posteriormente nos plantearemos las definiciones análogas dentro del marco de los grupos topológicos. Aunque hemos obtenido aún muy pocos resultados, nos parece un tema importante ya que los subgrupos y cocientes son esenciales al tema de dualidad.

Lema 7.5.1 *Si un espacio vectorial topológico E tiene la propiedad de extensión de Hahn-Banach, entonces tiene suficientes funcionales lineales continuos para separar puntos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in E$ distinto de cero. Consideramos $H = \mathbb{R}x$ y $f\colon H \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $f(x) = 1$. La extensión de f a E separa x de 0. $\square$

Lema 7.5.2 *Un espacio vectorial topológico E tiene la propiedad de extensión de Hahn-Banach si y sólo si todo subespacio cerrado $M \subset E$, es débilmente cerrado.*

DEMOSTRACIÓN:

$\Rightarrow$) Sea $M \subset E$ un subespacio cerrado, E/M tiene la propiedad de extensión de Hahn-Banach y, por el lema anterior, tiene suficientes funcionales lineales continuos para separar puntos. Así M es débilmente cerrado.

$\Leftarrow$) Sea $M \subset E$ un subespacio cerrado y $\varphi \in M^* \setminus \{0\}$. Consideremos el subespacio cerrado de E, $N = \text{Ker } \varphi \subset M$ y $x \in M \setminus N$. Por ser N débilmente cerrado, existe $\psi \in E^*$ tal que $\psi(N) = 0$ y $\psi(x) = \varphi(x) \neq 0$. Veamos que ψ es extensión de φ. Si $m \in M$, existen $k \in \mathbb{R}$ y $n \in N$ tal que $m = kx + n$, ya que se verifica

$M = \mathbb{R}x + N$. Entonces $\psi(m) = k\psi(x) + \psi(n) = k\varphi(x) = \varphi(kx) + \varphi(n) = \varphi(m)$.

$\square$

Para un subespacio cerrado M de un espacio vectorial topológico E, no son proposiciones equivalentes "tener la propiedad de extensión de Hahn-Banach" y "ser un subespacio débilmente cerrado" ([50] pag.60). Sin embargo, como acabamos de ver, si una de las dos condiciones se da para todos los subespacios cerrados de E, también se da la otra.

Diremos que un grupo topológico G *tiene la propiedad* $X1$ si y sólo si todos sus subgrupos cerrados son dualmente cerrados y diremos que *tiene la propiedad* $X2$ si y sólo si todos sus subgrupos cerrados son dualmente sumergidos. Estas propiedades, aunque ya habían sido estudiadas para algunas clases de grupos topológicos, se definieron explícitamente en [20]. De hecho hemos seguido su terminología. También cabe definirlas en grupos de convergencia.

Las siguientes clases de grupos verifican $X1$ y $X2$:

- localmente compactos ([66])
- productos de localmente compactos ([52])
- nucleares ([8])
- fuertemente reflexivos en sentido Pontryagin ([10])
- fuertemente BB-reflexivos (Teorema 7.4.1)

Los espacios de Banach infinito dimensionales considerados con su estructura de grupo no tienen las propiedades $X1$ y $X2$ ([8]). Por tanto un grupo reflexivo no verifica necesariamente $X1$ y $X2$.

Si un grupo BB-reflexivo cumple $X1$ y $X2$, todos sus subgrupos cerrados son BB-reflexivos (Proposición 7.1.1). $X1$ y $X2$ son hereditarias para subgrupos cerrados y cocientes de Hausdorff ([20]).

A continuación probamos que estas propiedades se pueden caracterizar simplemente por el comportamiente de un subgrupo abierto en relación a ellas.

Teorema 7.5.3 *Sea G un grupo topológico y $A \subset G$ un subgrupo abierto, entonces G tiene las propiedades $X1$ y $X2$ si y sólo si A las tiene.*

DEMOSTRACIÓN: Por ser A un subgrupo cerrado, si G tiene las propiedades $X1$ y $X2$, A también las tiene.

Veamos el recíproco.
Supongamos que A tiene la propiedad $X1$. Sea H un subgrupo cerrado de G y $x \in G \setminus H$. Distinguiremos dos casos:

a) Si $x \notin A+H$, por ser $A+H$ un subgrupo abierto de G, es dualmente cerrado y existe $\chi \in \Gamma G$ tal que $\chi(x) \neq 1$ y $\chi(A+H) = 1$, en particular $\chi(H) = 1$.

b) Si $x \in A+H$, sea $a \notin H$ tal que $x = a+h$ con $h \in H$. Por ser $A \cap H$ un subgrupo abierto de A y $a \notin A \cap H$, existe $\chi \in \Gamma A$ tal que $\chi(a) \neq 1$ y $\chi(A \cap H) = 1$, es decir $\chi \in (A \cap H)^o \subset \Gamma A$. Considerando ahora los isomorfismos $\Gamma(A/A \cap H) \rightarrow (A \cap H)^o$ y $A/A \cap H \rightarrow A + H/H$, obtenemos un carácter $\chi' \in \Gamma(A+H)$ tal que $\chi'(a) \neq 1$ y $\chi'(H) = 1$. Así $\chi'(x) = \chi'(a+h) = \chi'(a)\chi'(h) = \chi'(a) \neq 1$. Y este carácter se puede extender a G porque $A+H$ es un subgrupo abierto de G y por tanto es dualmente sumergido.

Supongamos ahora que A tiene la propiedad $X2$. Sea $H \subset G$ un subgrupo cerrado y $\chi \in \Gamma H$. Entonces, por ser $A \cap H$ un subgrupo cerrado de A, es dualmente sumergido y existe $\tilde{\chi} \in \Gamma A$ que es extensión de $\chi_{|A \cap H}$. Definimos $\chi' \in \Gamma(A+H)$ de la siguiente forma: $\chi'(a+h) = \tilde{\chi}(a)\chi(h)$. Está bien definida porque $\tilde{\chi}_{|A\cap H} = \chi_{|A \cap H}$. Es continua porque su restricción a un subgrupo abierto, $\chi'_{|A} = \tilde{\chi}$, es continua. Y es extensión de χ. Ahora basta extender a G considerando que $A+H$ es un subgrupo abierto. □

Proposición 7.5.4 *Sea G un grupo topológico y $H \subset G$ un subgrupo. Entonces H es dualmente cerrado si y sólo si H es cerrado en la topología de Bohr, τ^+.*

DEMOSTRACIÓN: $\Rightarrow$) es fácil. $\Leftarrow$) [79]. □

Tratemos ahora el caso en que el grupo topológico E sea el grupo subyacente a un espacio vectorial topológico. Obviamente si E verifica $X2$, también verifica la propiedad de extensión de Hahn-Banach, no siendo cierta la recíproca. Además tenemos la siguiente relación:

Proposición 7.5.5 *Un subespacio cerrado $M \subset E$ es débilmente cerrado si y sólo si es dualmente cerrado como subgrupo de E considerado con su estructura aditiva. Y* *tiene la propiedad de extensión de Hahn-Banach si y sólo si es dualmente sumergido como subgrupo de E.*

DEMOSTRACIÓN: Es una consecuencia inmediata de que la aplicación $T_E\colon E^* \to \Gamma E$ sea un isomorfismo de grupos y de la Proposición 5.0.3. □

En espacios vectoriales metrizables, la propiedad de extensión de Hahn-Banach y la propiedad $X1$ están relacionadas con la reflexividad y la reflexividad fuerte, como probamos a continuación.

Proposición 7.5.6 *Sea E un espacio vectorial topológico, metrizable y completo.*

a) Tener la propiedad de extensión de Hahn-Banach es equivalente a ser Pontryagin reflexivo.

b) Tener la propiedad $X1$ equivale a ser Pontryagin fuertemente reflexivo.

DEMOSTRACIÓN:

a) En espacios vectoriales métricos completos, tener la propiedad de extensión de Hahn-Banach es equivalente a ser localmente convexo ([50] 4.8) y esto a su vez es equivalente a ser BB-reflexivo o Pontryagin reflexivo.

b) Los grupos fuertemente BB-reflexivos tienen la propiedad $X1$. Veamos el recíproco para espacios métricos completos.
Si E es métrico completo y tiene la propiedad $X1$, también tiene la propiedad de extensión de Hahn-Banach y entonces es localmente convexo. Si E es localmente convexo metrizable y tiene la propiedad $X1$ es un espacio nuclear ([9]). Los espacios localmente convexos nucleares son grupos nucleares ([8] 7.4) y los grupos nucleares, metricos, completos, son Pontryagin fuertemente reflexivos ([8](17.3)). □

Nos preguntamos si para grupos se verifican las siguientes relaciones, análogas a las de espacios vectoriales:

Cuestión 3 *Si un grupo tiene la propiedad $X2$, ¿tiene suficientes caracteres continuos?*

Cuestión 4 *¿ Un grupo tiene $X1$ si y sólo si tiene $X2$?*

Capítulo 8

Aproximación al Teorema de Eberlein-Smulyan para grupos topológicos

Queremos probar, para grupos topológicos metrizables, un Teorema análogo al de Eberlein-Smulyan-Grothendieck para espacios vectoriales. Con esta finalidad utilizaremos el concepto de espacio angélico y probaremos que todo grupo metrizable cuyo dual separe puntos es angélico con respecto a su topología de Bohr.

8.1 Espacios angélicos. Definición y propiedades

La noción de espacio angélico fue introducida por Fremlin. Recordamos en este apartado algunas definiciones relacionadas con ellos y daremos resultados conocidos en los que nos apoyaremos. Incluimos demostraciones de los mismos cuando son distintas de las hechas por otros autores.

Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de X.

- Un punto $x_0 \in X$ es un *punto de aglomeración* de una red si existe una subred convergente a x_0,
- A es *compacto* si toda red de A tiene un punto de aglomeración en A,
- A es *relativamente compacto* si $\overline{A}$ es compacto,

- A es *numerablemente compacto* si toda sucesión de A tiene un punto de aglomeración en A,
- A es *relativamente numerablemente compacto* si toda sucesión de A tiene un punto de aglomeración en X (en general, esto no es lo mismo que decir que $\overline{A}$ es numerablemente compacto),
- A es *secuencialmente compacto* si toda sucesión de A posee una subsucesión convergente a un punto de A.

Es inmediato que compacidad y compacidad secuencial implican ambas la compacidad numerable, pero en general no se verifican otras implicaciones entre estos conceptos. A continuación mencionamos ejemplos estándard que así lo prueban. En el marco de los espacios metrizables se da la equivalencia de las tres propiedades.

Ejemplo 8.1.1 $X = \prod_{r\in\mathbb{R}} I_r$ *con* $I_r = [0,1]$.
X *es compacto y no secuencialmente compacto.*

Ejemplo 8.1.2 $X = [0,\Omega)$ *con* Ω *el primer ordinal no numerable dotado de la topología del orden.*
X *es secuencialmente compacto y no compacto.*

Ejemplo 8.1.3 $X = \prod_{r\in\mathbb{R}} I_r \times [0,\Omega)$ *con* $I_r = [0,1]$ *y* Ω *el primer ordinal no numerable.*
X *no es compacto ni secuencialmente compacto pero es numerablemente compacto.*

Un espacio topológico de Hausdorff X se dirá que es *angélico* si para todo subconjunto $A \subset X$ relativamente numerablemente compacto se verifica:

i) A es relativamente compacto

ii) Para cada $b \in \overline{A}$ existe una sucesión en A convergente a b

Lema 8.1.4 *Sea* X *un espacio angélico,* $S = (x_n)$ *una sucesión relativamente numerablemente compacta y sea* z *un punto de aglomeración de* S*. Entonces existe una subsucesión de* S *convergente a* z*.*

DEMOSTRACIÓN: Si $card\ \{n \in \mathbb{N} : x_n = z\}$ es infinito, tenemos una subsucesión constante y por tanto convergente a z.
Estudiemos el caso en que $card\ \{n \in \mathbb{N} : x_n = z\} < \aleph_0$.
Si $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, claramente $z \in \overline{A}$. Por ser X angélico, existe una sucesión en A, convergente a z. Sea $(y_k) \subset A$ con $y_k \to z$, entonces $\forall k$, $\exists n_k$ tal que $y_k = x_{n_k}$. Construímos ahora una subsucesión de (y_k), que también lo sea de (x_n). Tomamos $k_1 = 1$, i.e. $y_{k_1} = y_1 = x_{n_1}$. Sea k_2 el primer índice de $\{n_k : n_k > n_1\}$, k_3 el primer índice de $\{n_k : n_k > k_1, k_2\}$, y así sucesivamente. Obtenemos (y_{k_m}) que es subsucesión de (x_n) y converge a z porque es también subsucesión de (y_k). $\square$

Proposición 8.1.5 *Si X es angélico y $A \subset X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es numerablemente compacto*
2. *A es secuencialmente compacto*
3. *A es compacto*

DEMOSTRACIÓN: Las implicaciones 2) $\Rightarrow$ 1) y 3) $\Rightarrow$ 1) se verifican en todo espacio topológico. Veamos las contrarias:

1) $\Rightarrow$ 2) Sea S una sucesión en A, por la hipótesis existe un punto de aglomeración de S, $z \in A$. Como $S \subset A$ y A es numerablemente compacto, claramente S es relativamente numerablemente compacto. Así, aplicando el Lema 8.1.4, existe una subsucesión convergente a dicho punto.

1) $\Rightarrow$ 3) Por ser A numerablemente compacto y X angélico, A es relativamente compacto. Veamos que también es cerrado. Sea $z \in \overline{A}$. Por ii) de la definición de espacio angélico y teniendo en cuenta que todos los subespacios de A son relativamente numerablemente compactos, existe $(x_n) \subset A$ que converge a z. Como A es numerablemente compacto, dicha sucesión tiene un punto de aglomeración a en A. Por ser X de Hausdorff y (x_n) convergente a z tenemos $z = a \in A$.

$\square$

A continuación enunciamos propiedades de estabilidad que se demuestran fácilmente (cfr. [73]).

Lema 8.1.6 *Todo espacio homeomorfo a uno angélico es también angélico.*

Lema 8.1.7 *Todo subespacio de un espacio angélico es angélico.*

Lema 8.1.8 *Sea Z un espacio topológico regular, X un espacio angélico y $f\colon Z \to X$ una aplicación continua y biyectiva, entonces Z es angélico.*

En particular tenemos:

Lema 8.1.9 *Sean τ_1 y τ_2 topologías regulares en X tales que $\tau_1 \leq \tau_2$. Si (X, τ_1) es angélico, entonces (X, τ_2) también lo es.*

8.2 Teorema de tipo "Eberlein-Smulyan" para espacios de funciones

Mencionamos aquí dos resultados importantes de Pryce, sobre espacios de funciones, relacionados con los teoremas de Eberlein y Smulyan. Obtenemos también algunos corolarios que facilitarán nuestro trabajo en esta linea con grupos topológicos.

Teorema 8.2.1 *([73])*
Sea X un espacio topológico, $H \subset C(X, \mathbb{R})$ y ψ un elemento de la clausura de H en $\mathbb{R}^X$. Supongamos además que toda sucesión en H tiene un punto de aglomeración en $C(X, \mathbb{R})$ dotado de la topología de la convergencia puntual. Entonces para todo σ-compacto $B \subset X$, existe $f \in C(X, \mathbb{R})$ y una sucesión $(f_n) \subset H$ tal que $f_n(x) \to \psi(x) = f(x)$, $\forall x \in \overline{B}$.

Teorema 8.2.2 *([73] Theorem 3.1)*
Si $C(X, \mathbb{R})$ es angélico en la topología de la convergencia puntual, es también angélico $C_p(X, Z)$, donde Z designa un espacio métrico cualquiera.

Demostración: Completamos algunos detalles de la demostración que hace Pryce. Sea H contenido en $C_p(X, Z)$ relativamente numerablemente compacto. Sumergimos H en $\prod_{x \in X} H(x)$, donde cada $H(x) := \{f(x) : f \in H\}$ es un subconjunto relativamente numerablemente compacto del espacio métrico Z, por lo que es también

relativamente compacto. Así $\overline{H}$ es un cerrado dentro del compacto $\prod_{x \in X} \overline{H(x)}$, luego es compacto en Z^X.
Veamos ahora que si $f \in \overline{H}$, entonces f es continua y es límite puntual de una sucesión de funciones en H.

- Elegimos $x_0 \in X$ y definimos $g: Z \to \mathbb{R}$ mediante $g(t) = \rho(t, f(x_0))$, donde ρ designa la distancia en Z. La aplicación $\xi: Z^X \to \mathbb{R}^X$ definida por $\xi(h) = gh$ es continua, y por consiguiente $\xi(\overline{H}) \subset \overline{\xi(H)}$. Así $gf \in \overline{\xi(H)}$ y $\xi(H)$ es relativamente numerablemente compacto, y por ser $C_p(X, \mathbb{R})$ angélico, se deduce que $gf: X \to \mathbb{R}$ es continua. Y entonces, para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ convergente a x_0, $\rho(f(x_\alpha), f(x_0)) \to \rho(f(x_0), f(x_0)) = 0$, luego f es continua.
- Si $h \in Z^X$, definimos $\eta(h) \in \mathbb{R}^X$ mediante $\eta(h)(x) = \rho(h(x), f(x))$. La aplicación $\eta: Z^X \to \mathbb{R}^X$ es continua y $\eta(H)$ es relativamente numerablemente compacto en el espacio angélico $C_p(X, \mathbb{R})$, i.e. $\overline{\eta(H)} \cap C_p(X, \mathbb{R})$ es compacto, luego también es compacto en $\mathbb{R}^X$ que obviamente contiene a $\eta(H)$. Así $\eta(f) \in C(X, \mathbb{R})$. Además, para $\eta(f) \in \eta(\overline{H}) \subset \overline{\eta(H)}$ existe una sucesión (h_n) en $\eta(H)$ convergente a $\eta(f)$ en $\mathbb{R}^X$. Es decir, $\forall n$, existe $f_n \in H$ tal que $h_n = \eta(f_n)$ y $\eta(f_n)(x) = \rho(f_n(x), f(x))$ converge a $\rho(f(x), f(x)) = 0$ para todo $x \in X$. Luego (f_n) converge puntualmente a f.

$\square$

Corolario 8.2.3 *Si X es un espacio σ-compacto o contiene un conjunto σ-compacto denso e Y es un espacio métrico cualquiera, $C_p(X, Y)$ es angélico.*

Corolario 8.2.4 *Sea E un espacio vectorial topológico cuyo dual separa puntos. Si $E^*_\omega = (E^*, \omega(E^*, E))$ es σ-compacto, entonces E_ω es angélico. En particular, si E es metrizable, E^*_ω es σ-compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que la aplicación

$$\begin{array}{rccl} J\colon & E_\omega & \to & C_p(E^*_\omega, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{E^*} \\ & x & \to & J(x)\colon f \in E^* \to f(x) \end{array}$$

es un encaje isomórfico. Luego E con la topología débil es subespacio de un espacio angélico y por tanto E_ω es angélico.

Si E es un espacio vectorial topológico metrizable, existe una base numerable de entornos de 0, $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por el teorema de Alaoglu-Bourbaki, los polares

$U_n^{\triangleright}$ son $\omega(E^*, E)$-compactos. Por otra parte, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^{\triangleright} = E^*$. En efecto, si $f \in E^*$, $f^{-1}([-1,1])$ es entorno de 0 en E y por tanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $U_m \subset f^{-1}([-1,1])$. En consecuencia $f \in U_m^{\triangleright}$, y E_ω^* es σ-compacto. □

Se obtiene como corolario que todo espacio de Banach dotado de la topología débil es angélico. De hecho si E es un espacio de Banach (o más generalmente E es espacio vectorial topológico localmente acotado, como vemos en el Corolario 8.2.5) no sólo es E_ω^* σ-compacto, sino que además es compactamente generado.

Corolario 8.2.5 *Sea E un espacio vectorial topológico real, localmente acotado, tal que E^* separa puntos. Si V es un entorno de cero acotado, entonces $V^{\triangleright}$ (polar como e.v.t.) separa puntos y $E^* = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} \lambda V^{\triangleright}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $V \in \mathcal{B}_E(0)$ acotado. Para probar que $V^{\triangleright}$ separa puntos tomamos $x_0 \in E$ tal que $\varphi(x_0) = 0$, $\forall \varphi \in V^{\triangleright}$; veamos que en ese caso $\forall \psi \in E^*$ se tiene $\psi(x_0) = 0$ y como E^* separa puntos, tendremos que $x_0 = 0$.
Sea $\psi \in E^*$. Consideremos $W = \{y \in E$ tal que $|\psi(y)| < 1\} \in N_G(0)$. Por ser V acotado, V es absorbido por todo entorno de cero. En particular, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $V \subset \lambda W$. Ahora $\forall x \in V$, $\left|\psi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right| < 1$; es decir, $\left|\left(\frac{\psi}{\lambda}\right)(x)\right| < 1, \forall x \in V$. Obtenemos así que $\frac{\psi}{\lambda} \in V^{\triangleright}$, luego $\psi \in \lambda V^{\triangleright}$ y $\psi(x_0) = 0$.

Por el Teorema de Alaoglu-Bourbaki $V^{\triangleright}$ es $\omega(E^*, E)$-compacto y así $E^* = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} \lambda V^{\triangleright}$ es compactamente generado. □

Observemos que la topología débil de un espacio localmente convexo metrizable, no es en general secuencial (i.e. no está determinada por sucesiones).

Ejemplo 8.2.6 *Sea $X = l_2$, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ la base canónica y*

$$A = \{e_m + me_n : 1 \leq m < n < \infty\},$$

entonces $0 \in \overline{A}^{\omega}$, pero ninguna sucesión en A converge a 0:

- *Sea W entorno de cero en la topología débil de l_2. W contiene un conjunto de la forma $\{x \in l_2 : |\langle x, x_i\rangle| < \varepsilon, i = 1, \cdots, r\}$ determinado por $\varepsilon > 0$ y $x_1, \cdots, x_r \in l_2$.*

Vamos a ver que $W \cap A \neq \emptyset$*. Como para todo* $i = 1, \cdots, r$*,* $< x_i, e_n > \to 0$*, podemos determinar* $m_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $| < x_i, e_m > | < \frac{\varepsilon}{2}$*,* $\forall m \geq m_0$*, y a continuación determinamos* $n_0 > m_0$ *tal que* $| < x_i, e_{n_0} > | < \frac{\varepsilon}{2m_0}$*, para todo* $i = 1, \cdots, r$*. Se tiene* $e_{m_0} + m_0 e_{n_0} \in A \cap W$ *ya que*

$$| < e_{m_0} + m_0 e_{n_0}, x_i > | \leq | < e_{m_0}, x_i > | + m_0 | < e_{n_0}, x_i > | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto $0 \in \overline{A}^{\omega}$*.*

- *Veamos que no existen sucesiones en* A *que converjan a* 0*. Supongamos que existen* (p_n) *y* (q_n) *sucesiones en* $\mathbb{N}$ *tales que,* $z_m := e_{p_m} + p_m e_{q_m}$*, con* $q_m > p_m$ *y* $(z_m)_m$ *que converja a* 0 *débilmente. Entonces* $\forall y \in l_2$*,* $< y, z_m > \to 0$*. En particular, para* $y_0 := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} e_i$*, tenemos* $< y_0, e_{p_m} + p_m e_{q_m} > = \frac{1}{p_m} + \frac{p_m}{q_m} \to 0$*. Como ambos sumandos son positivos,* $\frac{1}{p_m} \to 0$ *por lo que* $p_m \to \infty$*. Entonces* $(||z_m||)_m$ *no es acotada porque* $||z_m|| > p_m$*. Y aplicando el teorema de la acotación uniforme llegamos a una contradicción.*

Corolario 8.2.7 *Sea* E *un espacio vectorial topológico cuyo dual separa puntos y tal que* E^*_ω *es* σ*-compacto. Entonces* E *dotado de cualquier topología compatible con la dualidad es angélico.*

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar el Lema 8.1.9 teniendo en cuenta que $(E, \omega(E, E^*))$ es angélico y que, si τ es una topología compatible con la dualidad, $\omega(E, E^*) < \tau$.

□

Corolario 8.2.8 *El espacio* $C_p(\Omega)$ *de las funciones continuas definidas en un abierto* Ω *del plano complejo* $\mathbb{C}$*, dotado de la topología de la convergencia puntual, es angélico.*

DEMOSTRACIÓN: Ω se puede escribir como unión numerable de compactos de $\mathbb{C}$. □

8.3 Versión del Teorema de Eberlein-Smulyian para grupos topológicos

Es muy natural, puesto que se dispone de los instrumentos adecuados, obtener Teoremas análogos a los de § 8.2 para grupos topológicos.

Teorema 8.3.1 *Sea G un grupo metrizable cuyo dual separa puntos. Entonces G^+, es decir, G dotado de la topología de Bohr $\omega(G,\Gamma G)$, es angélico.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de entornos de 0. Los polares U_n^o son $\omega(\Gamma G, G)$-compactos ([8] 1.5) y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^o = G^\wedge$. En efecto, dado $\varphi \in G^\wedge$ existe $V \in \mathcal{B}_G(0)$ tal que $Re(\varphi(V)) \geq 0$ y $V \supset U_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Es decir, $\varphi \in U_m^o$. Por tanto $\Gamma_\omega G := (\Gamma G, \omega(\Gamma G, G))$ es σ-compacto y $C_p(\Gamma_\omega G, \mathbb{T})$ es angélico por el Corolario 8.2.3.
Comprobemos ahora que la aplicación canónica:

$$\begin{array}{rccl} \alpha\colon & G^+ & \to & C_p(\Gamma_\omega G, \mathbb{T}) \\ & g & \to & \alpha(g)\colon \varphi \to \varphi(g) \end{array} .$$

es un isomorfismo topológico de G^+ en $\alpha(G^+)$.

- α es 1-1 porque $G^\wedge$ separa puntos de G
- α es continua: sea (x_β) una red en G $\omega(G,\Gamma G)$-convergente a x, entonces $\alpha(x_\beta) \to \alpha(x)$ ya que, para cada $\varphi \in G^\wedge$, $\alpha(x_\beta)(\varphi) = \varphi(x_\beta) \to \varphi(x) = \alpha(x)(\varphi)$.
- $\alpha^{-1}\colon \alpha(G^+) \to G^+$ es también continua. En efecto, sea $\alpha(x_\beta)$ una red convergente a $\alpha(x)$ en $\alpha(G^+) \subset C_p(\Gamma_\omega G, \mathbb{T})$. Para cada $\varphi \in G^\wedge$, $\alpha(x_\beta)(\varphi) \to \alpha(x)(\varphi)$ y por tanto $\varphi(x_\beta) \to \varphi(x)$, $\forall \varphi \in G^\wedge$. Luego $x_\beta \to x$ en G^+.

$\square$

Designemos por $\mathcal{E}$ la clase formada por los grupos topológicos que dotados de la topología de Bohr sean angélicos. Por 8.3.1, $\mathcal{E}$ contiene los grupos metrizables cuyo dual separa puntos. Nos disponemos a estudiar ahora si dicha clase contiene también grupos topológicos que no sean metrizables.

Lema 8.3.2 *Sea G un grupo topológico tal que todo subgrupo cerrado es dualmente cerrado. Entonces son equivalentes:*

a) G contiene un subgrupo compactamente generado denso

b) $G^\wedge$ posee un entorno de 0 que no contiene subgrupos no triviales.

DEMOSTRACIÓN:

a)⇒b) Sea $K \subset G$ un compacto tal que $\overline{< K >} = G$, entonces K^o es el entorno que buscamos. En efecto, supongamos que exista un subgrupo H contenido en K^o Sea $\chi \in H$. Si para algún elemento z de K fuese $\chi(z) \neq 1$, existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que $Re(\chi(z))^m < 0$ y, por ser H subgrupo, debe cumplirse $m\chi \in H \subset K^o$ que contradice lo anterior. Luego $\chi(z) = 1$ para todo $z \in K$ y así $H \subset K^\perp = < K >^\perp = \overline{< K >}^\perp = \{0\}$.

b)⇒a) Sea (S, V) un entorno de $0 \in G^\wedge$ que no contiene subgrupos no triviales. Por ser $S^\perp$ un subgrupo contenido en (S, V), $< S >^\perp = S^\perp = \{0\}$. Entonces $\overline{< S >} = G$, porque todo subgrupo cerrado es dualmente cerrado.

□

Lema 8.3.3 *Sea G un grupo topológico y U un entorno de 0. Entonces U^o separa puntos de G si y sólo si la envoltura casi-convexa de U no contiene subgrupos no triviales.*

Demostración: Si la envoltura casi-convexa de U contiene un subgrupo H no trivial, $\varphi(H) = 1$ para todo $\varphi \in U^o$ y entonces U^o no separa puntos de G.
La envoltura casi-convexa de U contiene siempre al subgrupo $\bigcap_{\varphi \in U^o} \varphi^{-1}(1)$. Si suponemos que no contiene subgrupos no triviales, $\bigcap_{\varphi \in U^o} \varphi^{-1}(1) = \{0\}$ y entonces para todo $g \neq 0$, existe $\varphi \in U^o$ tal que $\varphi(g) \neq 1$.

□

Proposición 8.3.4 *Sea G un grupo reflexivo en cuyo dual todo subgrupo cerrado es dualmente cerrado. Entonces son equivalentes:*

a) G contiene un entorno de cero U tal que U^o separa puntos de G,

b) G posee un entorno casi-convexo que no contiene subgrupos no triviales

c) $G^\wedge$ contiene un subgrupo denso compactamente generado

Además, si G es un grupo que cumple estas condiciones, G^+ es angélico.

Demostración: En el Lema 8.3.3 hemos visto que a) y b) son equivalentes.

Por ser G reflexivo, podemos aplicar el Lema 8.3.2 a $G^\wedge$ y obtenemos que c) es equivalente a b).

Y si $G^\wedge$ contiene un subgrupo denso σ-compacto, por el Corolario 8.2.3, $C_p(G^\wedge, \mathbb{T})$ es angélico y sumergiendo G^+ en $C_p(G^\wedge, \mathbb{T})$ obtenemos que es angélico.

$\square$

En el Teorema 8.3.1 y en la Proposición 8.3.4, hemos visto dos tipos de condiciones distintas en grupos topológicos para que el grupo con la topología débil sea angélico. Las condiciones de 8.3.4 son independientes de la metrizabilidad del grupo. Es decir, existen grupos metrizables que no cumplen a), b), c) y recíprocamente.

Ejemplo 8.3.5 *Sea $G := \mathbb{T}^\omega$ el producto numerable de copias de $\mathbb{T}$. El grupo G es metrizable y no existe ningún entorno de cero tal que su polar separe puntos.*
Sea V un entorno básico de cero en G. Entonces $V = \bigcap_{i \in F} p_i^{-1}(U_i)$ con F una cantidad finita de índices y $U_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(1)$. Sea $P := \{1\} \times \ldots \times \mathbb{T} \times \{1\} \times \ldots$ donde $\mathbb{T}$ se encuentra en el factor j, con $j \notin F$. P es un subgrupo contenido en V. Veamos que V^o no separa puntos. Si $\varphi \in V^o$, $Re(\varphi(z)) \geq 0$ para todo $z \in P$, entonces $\varphi(P) = 1$ porque la imagen de un subgrupo es un subgrupo. Así, tomando dos puntos $(1, \ldots, x_j, 1, \ldots) \neq (1, \ldots, x'_j, 1, \ldots)$ en P, $1 = \varphi(1, \ldots, x_j, 1, \ldots) = \varphi(1, \ldots, x'_j, 1, \ldots)$ para todo $\varphi \in V^o$.

Ejemplo 8.3.6 *Sea $G := \omega\mathbb{R}$ la suma directa numerable de copias de $\mathbb{R}$ con la topología de cajas. El grupo G no es metrizable. Y posee entornos, como $U := ((-1,1) \times (-1,1) \times \ldots) \cap \omega\mathbb{R}$, que no contienen subgrupos no triviales, ya que su polar separa puntos. En efecto,*

$$U^o = \bigcup_{1 \leq j_1 < \ldots < j_s < \infty} \left(\bigcup_{a_1 + \ldots + a_s = \frac{1}{4}} \{0\} \times \ldots \times [-a_1, a_1] \times \ldots \times [-a_s, a_s] \times \{0\} \times \ldots \right)$$

(cfr. §4.2).
Si tenemos $x \neq y$ en G, y en particular $x_j \neq y_j$ para $j \in \mathbb{N}$, existe entonces $r \in \left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ con $e^{2\pi i r x_j} \neq e^{2\pi i r y_j}$. Tomamos $\chi = (0 \times \ldots \times r \times 0 \times \ldots) \in U^o$ y obviamente $\chi(x) \neq \chi(y)$.

Los grupos nucleares aunque tienen propiedades muy fuertes, no son angélicos en su topología de Bohr. El siguiente ejemplo demuestra que en éllos no son equivalentes los tres tipos de compacidad que hemos ido estudiando.

Ejemplo 8.3.7 *Sea $G := \mathbb{T}^{\mathbb{R}}$ el producto no numerable de copias de $\mathbb{T}$. Vamos a construir una sucesión en G que no posee subsucesiones convergentes.*

Tomamos una biyección $g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, *y sea* $g(r) = (j_1^r, j_2^r, \ldots, j_n^r, \ldots)$. *Definimos* $x_n = (x_n(r))_{r\in\mathbb{R}} \in \mathbb{T}^{\mathbb{R}}$

$$x_n(r) := \begin{cases} i \in \mathbb{T} & si \quad n = j_k^r \text{ para algún } k \text{ impar} \\ 1 \in \mathbb{T} & si \quad n \notin \{j_1^r, j_3^r, \ldots, j_{2p+1}^r, \ldots\} \end{cases}$$

Esta sucesión $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset \mathbb{T}^{\mathbb{R}}$ *no posee subsucesiones convergentes, ya que, dada una subsucesión* $\{x_{l_m}\} \subset \{x_n\}$, *si fuera convergente también lo serían las sucesiones* $\{x_{l_m}(r)\}$ *para todo* $r \in \mathbb{R}$. *Para* $(l_m) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *podemos encontrar* $s \in \mathbb{R}$, *único con la condición* $g(s) = (l_m)$. *Entonces* $\{x_{l_m}(s)\} = \{i, 1, i, 1, \ldots\}$ *no es convergente en* $\mathbb{T}$.

El ejemplo anterior demuestra además que la clase de los grupos compactos, o de los localmente compactos, no están contenidas en $\mathcal{E}$. Observamos que en G, siendo compacto, coincide la topología original del grupo con la topología de Bohr.

Sin embargo, vamos a probar que los grupos nucleares verifican el enunciado más débil del Teorema de Eberlein:

Proposición 8.3.8 *Sea* G *un grupo nuclear completo y* $M \subset G$. *Si en* M *toda sucesión posee un punto de aglomeración débil (i.e.* M *es débilmente relativamente numerablemente compacto), entonces* M *es débilmente relativamente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $M \subset G$ tal que toda sucesión posee un punto de aglomeración débil. Teniendo en cuenta [11] pg.37, obtenemos que M es totalmente acotado, y en consecuencia, debido a la completitud de G, $\overline{M}$ es compacto. En particular $\overline{M}$ es débilmente compacto, luego $\overline{M}$ es también $\omega(G, \Gamma G)$-cerrado y de ahí se deduce que $\overline{M}^{\omega} = \overline{M}$ es compacto. □

Vemos a continuación que para los grupos topológicos de la clase $\mathcal{E}$, son equivalentes la propiedad de Schur (toda sucesión débilmente convergente es convergente) y la propiedad de respetar compacidad (todo subconjunto débilmente compacto es compacto). Sin embargo, si un grupo verifica esa equivalencia, no necesariamente está en la clase $\mathcal{E}$, como demuestra el Ejemplo 8.3.7. Así tenemos:

Corolario 8.3.9 *Si* G *es un grupo topológico, angélico con su topología de Bohr, entonces* G *tiene la propiedad de Schur si y sólo si respeta compacidad.*

DEMOSTRACIÓN:

$\Rightarrow$) Supongamos que G verifica la propiedad de Schur. Sea $K \subset G$ débilmente compacto. Para probar que K es compacto, teniendo en cuenta que G es también angélico (Lema 8.1.9), basta ver que toda sucesión (x_n) en K posee una subsucesión convergente. Como G con su topología de Bohr es angélico, (x_n) posee una subsucesión convergente, $x_{p_n} \xrightarrow{\omega} x$. Por la propiedad de Schur tenemos $x_{p_n} \to x$, luego K es compacto.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que G respeta compacidad, si $x_n \xrightarrow{\omega} x$ en G, el conjunto $S = \{x_n\} \cup \{x\}$ es débilmente compacto, luego S es compacto. Así, toda subsucesión de S posee una subred convergente y por tanto débilmente convergente, $s_d \xrightarrow{\omega} z$. Por ser subred de (x_n), $z = x$. Y esto concluye, por el axioma de Urysohn, que $x_n \to x$.

$\square$

En [47] se introduce la clase de espacios estrictamente angélicos, que es un poco más restrictiva que la clase de los angélicos.

Un espacio X es *estrictamente angélico* si es angélico y cumple que todo subconjunto de X compacto y separable es primero numerable. La ventaja de tratar con estos espacios es que el producto numerable de estrictamente angélicos es estrictamente angélico. Los espacios de funciones $C_p(X, \mathbb{R})$ siempre que sean angélicos son, además, estrictamente angélicos ([47] pag.356) y asimismo lo son los espacios del tipo $C_p(X, Z)$ para cualquier espacio métrico Z. Además, todo subespacio de un estrictamente angélico es estrictamente angélico ([47] pag.357). Aplicando ahora estas ideas a grupos topológicos tenemos:

Proposición 8.3.10 *Si G es un grupo topológico tal que su dual contiene un subgrupo denso σ-compacto, entonces todo subconjunto de G, $\omega(G, \Gamma G)$-compacto y separable es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN: Del Corolario 8.2.3 se deduce que $C_p(G^\wedge, \mathbb{T})$ es angélico y, por los comentarios que preceden a la Proposición, G^+ es estrictamente angélico. $\square$

Observemos que en esta Proposición no se puede prescindir totalmente de la hipótesis ya que $\mathbb{T}^{\aleph_1}$ es compacto y separable y no es metrizable.

Los grupos G que hasta ahora hemos demostrado que son angélicos con la topología de Bohr son aquéllos para los cuales el espacio de funciones $C_p(G^\wedge, \mathbb{T})$ es angélico. Si designamos por $\mathcal{E}_1$ a la clase de dichos grupos, tenemos $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$.

Cuestión 5 *El contenido $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ ¿es estricto?*

Corolario 8.3.11 *La clase $\mathcal{E}_1$ es estable por productos numerables.*

Sabemos que, en general, un producto de espacios angélicos no es angélico. Si para la clase $\mathcal{E}_1$ se pudiera afirmar lo mismo, la respuesta a la cuestión 5 sería negativa.

Índice de Materias

Bibliografía

[1] Araki, T. *A characterization of non-local convexity in some class of topological vector spaces.* Math. Japonica 41 (1995), pag.573-577.

[2] Arens, R.F. *A topology for spaces of transformations.* Annals of Math. 47 (1946), pag.480-495.

[3] Arens, R.F. - Dugundji, J. *Topologies for function spaces.* Pacific J. Math. 1 (1951), pag.5-31.

[4] Arkhangel'skii, A.V. *Topological Function Spaces.* Mathematics and Its Applications (Soviet Series), Vol.78. Kluwer Academic Publishers 1991.

[5] Auβenhofer, L. *Contributions to the Duality Theory of Abelian Topological Groups and to the Theory of Nuclears Groups.* Dissertation. Tübingen 1998.

[6] Bagley, R.W. - Yang, J.S. *On k-spaces and function spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), pag.703-705.

[7] Banaszczyk, W. *On the existence of Exotic Banach-Lie Groups.* Math. Ann. 264 (1983), 485-493.

[8] Banaszczyk, W. *Additive Subgroups of Topological Vector Spaces.* Lecture Notes in Mathematics 1466. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991.

[9] Banaszczyk,M. - Banaszczyk,W. *Characterization of Nuclear Spaces by Means of Additive Subgroups.* Mathematische Zeitschrift 186 (1984), pag.125-133.

[10] Banaszczyk, W. - Chasco, M.J. - Martín-Peinador, E. *Open Subgroups and Pontryagin Duality.* Mathematische Zeitschrift 215 (1994), 195-204.

[11] Banaszczyk, W. - Martín-Peinador, E. *The Glicksberg theorem on weakly compact sets for nuclear groups.* Annals of the New York Academy of Sciences, V. 788, 34-39 (1996)

[12] Banaszczyk, W. - Martín-Peinador, E. *Weakly pseudocompact subsets of nuclear groups.* Preprint. Accepted in Pure and Applied Algebra.

[13] Bartle, R.G. *Nets and filters in topology* Amer. Math. Monthly 62 (1957), pag.551-557.

[14] Beattie, R. *Continuous convergence and functional analysis.* Topology and its Applications 70 (1996), pag.101-111.

[15] Binz, E. *Continuous Convergence on $C(X)$.* Lecture Notes in Mathematics 469. Springer Verlag 1975.

[16] Binz, E. *On an extension of Pontryagin duality theory.* Lecture Notes in Mathematics 609, 1-20. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1977).

[17] Binz,E. - Butzmann,H.P. - Kutzler,K. *Über den c-Dual eines topologischen Vektorraumes.* Math. Z. 127 (1972), pag.70-74.

[18] Birkhoff, G. *Moore-Smith Convergence in general topology.* Annals of Mathematics Vol.38, No.1 (1937), pag.39-56.

[19] Bourbaki, N. *Éléments de Mathématique*: Livre III *Topologie Génerale.* Hermann 1960.

[20] Brown, R. - Higgins, P.J. - Morris, S.A. *Countable products and sums of lines and circles: their closed subgroups, quotients and duality properties.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 78 (1975), pag.19-32.

[21] Bruguera, M. *Some properties of locally quasi-convex groups.* Topology and its Applications 77 (1997), pp.87-94.

[22] Bruguera, M. - Martín-Peinador, E. *Open subgroups, compact subgroups and Binz-Butzmann reflexivity.* Topology and its Applications 72 (1996), pp.101-111.

[23] Bruns, G. - Schmidt, J. *Zur Aquivalenz von Moore-Smith-Folgen und Filtern.* Math. Nachr. Vol.13 (1955), pag.169-186.

[24] Butzmann, H.P. *Über die c-Reflexivität von $C_c(X)$.* Comment. Math. Helv. 127 (1972), pag.92-101.

[25] Butzmann, H.P. *Pontrjagin-Dualität für topologische Vektorräume.* Arch. Math. 28 (1977), 632-637.

[26] Butzmann, H.P. *Pontryagin duality for convergence groups of unimodular continuous functions.* Czechoslovak Math. J. 33(1983), pag.212-220.

[27] Butzmann, H.P. *c-Duality Theory for Convergence Groups.* Lecture in the Course "Convergence and Topology". Erice 1998.

[28] Chasco, M.J. *Pontryagin duality for metrizable groups.* Arch. Math. 70 (1998) pp.22-28.

[29] Chasco, M.J. - Martín-Peinador, E. *Binz-Butzmann duality versus Pontryagin Duality.* Archiv der Math. 63 (1994), pag.264-270.

[30] Chasco, M.J. - Martín-Peinador, E. - Tarieladze, V. *On Mackey topology for groups.* Studia Math. 132 (1999), 257-284.

[31] Cohen, D.E. *Spaces with weak topology.* Quart. J. Math., Oxford Ser. (2) 5 (1954), 77-80.

[32] Cohn, D.L. *Measure Theory.* Birkhauser 1980.

[33] Comfort,W.W. - Hernández,S. - Trigos-Arrieta,F.J. *Relating a locally compact abelian group to its Bohr compactification.* Preprint 1994. Advances in Math. 120 (1996), 322-344.

[34] Cook, C.H. - Fischer, H.R. *On equicontinuity and continuous convergence.* Math. Ann. 159 (1965), pag.94-104.

[35] Dierolf, S - Schwanengel, U. *Examples of locally compact non-compact minimal topological groups.* Pacific Journal of Mathematics, Vol.82, no.2 (1979), 349-354.

[36] Diestel, J. *Sequences and Series in Banach Spaces.* GTM; 92. Springer Verlag 1984.

[37] Dugundji, J. *Topology.* Allyn and Bacon, Boston 1966.

[38] Fischer, H.R. *Limesräume.* Math. Ann. 137 (1959), 269-303.

[39] Fox, R.H. *On topologies for function spaces.* Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), pag.429-432.

[40] Franklin, S.P. *Spaces in which sequences suffice.* Fund. Math. 57 (1965), pag.107-115.

[41] Franklin, S.P. *Spaces in which sequences suffice II.* Fund. Math. 61 (1967), pag.51-56.

[42] Fréchet, M. *Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits.* Bull. des Sciences Mathématiques 42 (1918), pag.138-156.

[43] Frölicher, A. - Jarchow, H. *Zur Dualitätstheorie Kompakt erzeugter un-lokalkonvexer Vektorräume.* Com. Math. Helv. 47 (1972), pag.289-310.

[44] Galindo, J. - Hernández, S. *Pontryagin-van Kampen reflexivity for free Abelian topological groups.* Preprint 1998. Aceptado en

[45] García, M. - Margalef, J. - Olano de Lorenzo, C. - Outerelo,E. - Pinilla,J.L. *Topología I.* Ed.Alhambra 1975.

[46] Glicksberg, I. *Uniform Boundedness for groups.* Canadian Journal of Math. 14 (1962), pag.269-276.

[47] Govaerts, W. *A productive class of angelic spaces.* J. London Math. Soc. (2)22 (1980), 355-364.

[48] Hewitt, E. - Ross, K.A. *Abstract Harmonic Analysis I.* Die Grundlehrender Mathematischen Wissenschaften 115 (1963).

[49] Jarchow, H. *Locally Convex Spaces.* B.G.Teubner Stuttgart 1981.

[50] Kalton, N.J. - Peck, N.T. - Roberts, J.W. *An F-space sampler.* Lecture Notes Series, 89. Cambridge University Press 1984.

[51] Kaplan, S. *Extension of the Pontryagin Duality. I: Infinite Products.* Duke Math. J. 15 (1948) 649-658.

[52] Kaplan, S. *Extension of the Pontryagin Duality. II: direct and inverse sequences.* Duke Math. J. 17 (1950) pag.419-435.

[53] Kelley, J.L. *Convergence in Topology.* Mathematical Journal 17 (1950), pag.277-283.

[54] Kelley, J.L. *General Topology.* GTM; 27. Springer Verlag 1955.

[55] Kent, D. - Mckennon, K. - Richardson, G. - Schroder, M. *Continuous Convergence in C(X).* Pacifical Journal of Mathematics Vol.52 No.2 (1974), pag. 457-465.

[56] Kisyński, J. *Convergence du type L.* Colloquium Mathematicum Vol.VII Fasc.2 (1960), pag.205-211.

[57] Komura, Y. *Some examples on linear topological spaces.* Math. Ann. 153 (1984), pag.150-162.

[58] Köthe, G. *Topological Vector Spaces I.* Die Grundlehrender Mathematischen Wissenschaften 159 (1969).

[59] Kuratowski, C. *Topologie I.* Warszawa 1952.

[60] Kutzler, K. *Eine Bemerkung über endlichdimensionale, separierte limitierte Vektorräume.* Arch. Math. 20 (1969), 165-168.

[61] Leptin, H. *Bemerkung zu einem Satz von S. Kaplan.* Arch. der Math. 6 (1955), 264-268.

[62] Margalef, J. - Outerelo, E. - Pinilla, J.L. *Topología II, III, IV y V.* Ed.Alhambra 1979.

[63] Martín-Peinador, E. *A reflexive admissible topological group must be locally compact.* Procedings Amer. Math. Soc. 123 (1995), pp.3563-3566.

[64] Michael, E. *Local compactness and cartesian products of quotient maps and k-spaces.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 18, 2 (1968), 281-286.

[65] Moore, E.H. - Smith, H.L. *A general theory of limits.* Amer. J. Math. 44 (1922), pag.102-121.

[66] Morris, S.A. *Pontryagin Duality and the structure of locally compact abelian groups.* Lecture Note Series, 29. Cambridge University Press 1977.

[67] Nickolas,P. *Reflexivity of topological groups.* Proc. Amer. Math. Soc. 65 (1977), pp.137-141.

[68] Noble, N. *k-Groups and Duality.* Transactions of the American Mathematical Society 151 (1970), pag.551-561.

[69] Ordman, E.T. *Convergence almost everywhere is not topological.* Amer. Math. Montly, 73 (1966) pag.182-183.

[70] Ostling, E.G. - Wilansky, A. *Locally Convex Topologies and the convex compactness Property.* Proc. Cambr. Phil. Soc. 74 (1974), pp.45-50.

[71] Poppe, H. *Compactness in General Functions Spaces.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlín 1974.

[72] Porta, H. *Compactly determined locally convex topologies.* Math. Ann. 196 (1972), 91-100.

[73] Pryce, J.D. *A device of R.J.Whitley's applied to pointwise compactness in spaces of continuous functions.* Proc. London Math. Soc. (3)23 (1971), 532-546.

[74] Reid, G.A. *On Sequential Convergence in Groups.* Math. Z. 102 (1967), pag.227-235.

[75] Roelke, W. - Dierolf, S. *Uniform structures on topological groups and their quotients.* McGraw-Hill International Book Company. New York-Toronto 1981.

[76] Rudin, W. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1973.

[77] Schaefer, H.H. *Stetige Konvergenz in allgemeinen topologischen Räumen.* Arch. Math. VI (1955), pp.423-427.

[78] Schaefer, H.H. *Topological Vector Spaces.* Graduate Texts in Mathematics 3. (1970).

[79] Sidney, S.J. *Weakly Dense Subgroups of Banach Spaces.* Indiana University Mathematics Vol.26, no.6 (1977), 981-986.

[80] Smith Freundlich, M. *The Pontryagin duality theorem in linear spaces.* Ann. of Math.(2) 56 (1952), 248-253.

[81] Spanier,E.H. *Algebraic topology.* McGraw-Hill series in higher Mathematics 1966.

[82] Turnwald, G. *On the continuity of the evaluation mapping associated with a group and its character group.* To appear in Proceedings of American Mathematical Society.

[83] Urysohn, P. *Sur les classes ($\mathcal{L}$) de M.Fréchet* Enseignement Mathématique 25 (1926), pag.77-83.

[84] Varopoulos, N.Th. *A theorem on the continuity of homomorphisms of locally compact groups.* Mathematical Proc. Camb. Phil. Soc. 60 (1964), pag.449- 463.

[85] Vilenkin, N.Ya. *The theory of characters of topological Abelian groups with boundedness given.* Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 15, (1951). 439-462.

[86] Ward, A.J. *Notes in general topology. I.Convergence of directed nets.* Proc. Camb. Phil. Soc. 61 (1965), pag.877-878.

[87] Weil, A. *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale.* Publ. Math. Univ. Strasbourg, Herman, Paris, 1937.

[88] Wojtaszczyk, P. *Banach spaces for analysts.* Cambridge studies in advanced mathematics 25 (1991).

[89] Wolk, E.S. *Continuous Convergence in Partially Ordered Sets.* General Topology and its Applications 5 (1975), pag.221-234.