

GEOMETRIA Y CONSTANTE COSMOLOGICA

Eduardo Aguirre

Septiembre 2007

0.1. Bibliografía seleccionada

MÁS O MENOS DIVULGATIVA SOBRE COSMOLOGÍA:

- **L. Abbot**, El misterio de la constante cosmológica, *Investigación y Ciencia*, julio 88
- **C.J. Hogan, R.P. Kirshner, N.B. Suntzeff**, Explorando el espacio-tiempo mediante supernovas, *IC*, marzo 99
- **L.M. Krauss**, Antigravedad cosmológica, *IC*, marzo 99
- **P. Ruiz – Lapuente, A.G. Kim, N. Walton**, Supernovas y expansión acelerada del universo, *IC*, marzo 99
- **A.G. Riess, M.S. Turner**, Cuando la aceleración cambió de signo, *IC*, abril 04
- **C.H. Lineweaver, T.M. Davis**, Las paradojas de la gran explosión, *IC*, mayo 05
- **J. Silk**, The big-bang, *Freeman*, 2001
- **C.L. Bennet y otros**, First Year WMAP Observations: Preliminary Maps and Basic Results, <http://map.gsfc.nasa.gov>, 2003

MÁS O MENOS ESPECIALIZADA SOBRE RELATIVIDAD:

- **J.H. Smith**, Introducción a la Relatividad Especial, *Reverté*, 1978
- **E.F. Taylor, J.A. Wheeler**, Spacetime physics, *Freeman*, 1992
- **B. Schutz**, Gravity, From the ground up, *Cambridge*, 2003
- **S. Weinberg**, Gravitation and Cosmology, *John Wiley*, 1972
- **W. Rindler**, Relativity, Special, General and Cosmological, *Oxford*, 2001
- **B. O'Neill**, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, *Academic Press*, 1983

1. RELATIVIDAD GENERAL

1.1. Espacio-tiempos (ETs)

ETs son ciertas **variedades diferenciables** M de dimensión 4:

$$\mathbf{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \underset{\text{ETNewton}}{\rightsquigarrow} (\mathbf{M} = \mathbb{R}^4, \mathbf{t}, \mathbb{R}^3) \underset{\text{ETGalileo}}{\rightsquigarrow} \left\{ \begin{array}{l} \rightsquigarrow (\mathbf{M} = \mathbb{R}^4, \mathbf{g}_0) \\ \text{ETRelatividad Especial} \\ \rightsquigarrow (\mathbf{M}, \mathbf{t}, \mathbb{R}^3, \mathbf{D}_{\text{GG}}) \\ \text{ETsGalileo+Gravitación} \end{array} \right\} \rightsquigarrow (\mathbf{M}, \mathbf{g}) \underset{\text{ETsRelatividad General}}{\rightsquigarrow}$$

Sobre el **(ETG)** : Exper. (Galileo) sugieren relatividad del reposo

Sobre el **(ETRE)** : Experimentos (Michelson-Morley) sugieren

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{relatividad del tiempo} \rightsquigarrow \text{relatividad de la simultaneidad} \\ \mathbf{c} \equiv \text{cte!! (módulo vel. de la luz) "homogeneiza" [T] a [L]} \\ \text{métrica Lorentz cte. } \mathbf{g}_0 : \text{forma bilineal, simétrica, signat. (+++)} \end{array} \right.$$

Sobre los **(ETsGG)** : Experimentos ("caída libre") sugieren

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{indetectabilidad partículas libres} \rightsquigarrow \text{indetectabilidad estr. afín} \\ \text{conexión } \mathbf{D}_{\text{GG}}: \text{ley de "transporte" de } \text{vectores tangentes} \\ \text{(para extremos fijos, depende de la curva seguida} \rightsquigarrow \text{curvatura)} \end{array} \right.$$

Sobre los **(ETsRG)** : Ingredientes matemáticos:

$$(\mathbf{M}, \underset{\substack{\text{métrica Lorentz} \\ \in \mathfrak{T}_2^0(M)}}{\mathbf{g}}) \rightsquigarrow \underset{\substack{\text{Levi-Civita} \\ \in \text{Conexión}(M)}}{\mathbf{D}} \rightsquigarrow \underset{\substack{\text{curvatura} \\ \in \mathfrak{T}_3^1(M)}}{\mathbf{R}} \rightsquigarrow \underset{\substack{\text{Ricci} \\ \in \mathfrak{T}_2^0(M)}}{\mathbf{Ric}} \overset{\mathbf{g}}{\rightsquigarrow} \underset{\substack{\text{curvat. escalar} \\ \in C^\infty(M)}}{\mathbf{Sc}},$$

donde $\mathfrak{T}_s^r(M) := \mathcal{L}(\underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \dots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{r \text{ formas de grado 1}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ campos de vectores}}, C^\infty(M))$

- \mathbf{g} da una forma bilineal, simétrica y de signat. (+++) en cada espacio tangente. La existencia de tales \mathbf{g} restringe a la variedad \mathbf{M}

- Vectores tangentes \mathbf{u} con $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) < 0$ se llaman **temporales**. Para representar bien la idea de direcciones tangentes "futuras" y "pasadas", se exige que el conjunto de vectores temporales tenga dos componentes conexas, lo que restringe al par (\mathbf{M}, \mathbf{g})

- Cada partícula de "masa" m se representa por una curva diferenciable γ con tangente γ' futura y $\mathbf{g}(\gamma', \gamma') = -m^2 c^2$.

- \mathbf{D} geometriza la gravitación. Si la partícula está "en caída libre", su curva γ debe ser **geodésica** de \mathbf{D} . La curvatura \mathbf{R} describe (via **campos de Jacobi**) las aceleraciones relativas de geodésicas próximas ("mareas"). **Ric** es (como \mathbf{g}) simétrico y describe los promedios de dichas aceleraciones

- **(ETsRG)** $\xrightarrow{\mathbf{R} \rightarrow 0}$ **(ETRE)** y **(ETsRG)** $\xrightarrow{|\mathbf{v}|/c \ll 1, |\mathbf{v}_{\text{escape}}|/c \ll 1}$ **(ETsGG)**

1.2. Tensión-energía. Ecuación de Einstein

En un (M, g) cada base ortonormal tangente $\{e_i\}_{i=1,2,3,4}$ "atribuye", a cada partícula γ de masa m que encuentra,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{energía } E := -c g(\gamma', e_4) > 0 \quad [ML^2T^{-2}] \\ \text{momento } P := \gamma' - Ee_4 \in e_4^\perp \quad [MLT^{-1}] \\ \text{velocidad } v := c^2 P/E \in e_4^\perp \quad [LT^{-1}] \end{array} \right\}, \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma' = (P, E/c) \\ E^2 = m^2 c^4 + |P|^2 c^2 \end{array} \right.$$

• Si $m > 0$ (partículas materiales) se deduce: $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ y $P = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, lo que tiene apoyo experimental (conservación en colisiones) y buenos límites: $E \xrightarrow{|v|/c \ll 1} mc^2 + mv^2/2$ y $P \xrightarrow{|v|/c \ll 1} mv$

• Si γ debe representar luz ($|v| = c$) se deduce: $m = 0$, lo que tiene apoyo experimental (efectos fotoeléctrico y Compton sugieren: $E = h\nu = c |P|$, con $h \equiv cte.$ $[ML^2T^{-1}]$ de Planck y ν "frecuencia")

Sumando contribuciones, dividiendo por volúmenes y haciendo tender éstos a cero, cada $\{e_i\}$ "mide" 16 magnitudes T_{ij} $[ML^{-1}T^{-2}]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\mu\nu} := \text{flujo de } \nu\text{-momento por u. área ortogonal a } e_\mu \text{ y u. tiempo} \\ \quad (\text{presiones si } \mu = \nu, \text{ cizallas si } \mu \neq \nu) \\ T_{\mu 4} := \frac{-1}{c} \cdot \text{flujo de energía por u. área ortogonal a } e_\mu \text{ y u. tiempo} \\ T_{4\nu} := c \cdot \text{densidad de } \nu\text{-momento} \\ T_{44} := \text{densidad de energía} \end{array} \right. \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

que resultan ser (!) las "componentes" en $\{e_i\}$ de un cierto tensor

$$T \in \mathfrak{T}_2^0(M) \quad (\text{tensión-energía})$$

simétrico (\rightsquigarrow sólo 10 componentes indep.). Y los experimentos (conservación en colisiones) sugieren **divergencia nula**: $\boxed{\text{div } T = 0}$

La ECUACIÓN DE EINSTEIN (1915-18)

$$\boxed{\text{Ric} - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = \frac{8\pi G}{c^4} T} \quad (1)$$

(con $G \equiv cte.$ $[M^{-1}L^3T^{-2}]$ de Newton y $\Lambda \equiv cte.$ $[L^{-2}]$ arbitraria):

• postula cómo la naturaleza restringe el par (T, g) ("cómo la materia curva la geometría")

• da lugar, en cualquier sistema de coordenadas, a un sistema de 10 EDP's hiperbólicas, de segundo orden, cuasi-lineales en las componentes g_{ij} de la métrica y con 4 ecuaciones de ligadura

• tiene por límite, cuando $v/c \ll 1$ y $v_{\text{escape}}/c \ll 1$, la ecuación de Poisson $\Delta\Phi = 4\pi G\rho_m$ de la gravitación galileana (con $\Phi \equiv$ potencial gravitatorio, $\rho_m \equiv$ densidad de masa)

• tiene por miembro izquierdo "el objeto geométrico más general posible" (Lovelock) compatible con $\text{div } T = 0$

1.3. Fluidos perfectos. Constante cosmológica

Un **fluido perfecto** es un sistema físico cuya tensión-energía \mathbf{T} verifica ("isotropía espacial"):

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \rho c^2 \\ \mathbf{T}(\mathbf{U}, \mathbf{X}) = \mathbf{0} \text{ , si } \mathbf{X} \perp \mathbf{U} \\ \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = p \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \text{ , si } \mathbf{X}, \mathbf{Y} \perp \mathbf{U} \end{cases}} \quad (2) \text{ ,}$$

para ciertos $\begin{cases} \mathbf{U} \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \text{ futuro y } \mathbf{g}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = -1 \text{ (observador promedio)} \\ \rho c^2 \in C^\infty(\mathbf{M}) \text{ (densidad de energía)} \\ p \in C^\infty(\mathbf{M}) \text{ (presión)} \end{cases}$

Para un fluido perfecto la condición $\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{0}$ equivale a:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(\rho c^2) = -(\rho c^2 + p) \text{div } \mathbf{U} \\ (\rho c^2 + p) \mathbf{D}_{\mathbf{U}} \mathbf{U} = -\text{grad}_{\perp} p \end{cases} \quad (3) \text{ ,}$$

donde la primera ecuación (**continuidad**) dice que el trabajo ejercido por la presión produce variaciones en la densidad de energía, mientras que la segunda (**Euler**) dice que los gradientes espaciales de presión apartan al campo promedio de la caída libre

• Todos los fluidos perfectos "conocidos" (colecciones finitas de flujos de partículas, con isotropía generada por colisiones) verifican

$$\boxed{\rho c^2 > 0 \text{ y } \rho c^2 \geq 3p \geq 0} \quad (\Rightarrow \rho c^2 + 3p > 0) \text{ ,}$$

con casos extremos $\rho c^2 = 3p > 0$ (**radiación**) y $\rho c^2 > 3p = 0$ (**polvo**)

La **constante cosmológica** Λ en la ecuación (1) fue introducida por Einstein (1918) para posibilitar un modelo cosmológico "estático" en el que las galaxias fueran polvo (ver (6) más adelante)

• Para un fluido perfecto con $p = -\rho c^2$ ("no posee inercia"), se sigue de (2) que \mathbf{U} es cualquiera y se sigue de (3) que $\rho \equiv \text{cte}$. Con lo que añadir en el miembro izquierdo de (1) un término $\Lambda \mathbf{g}$ equivale a añadir en el miembro derecho la tensión-energía de un fluido perfecto ("desconocido", ¿el vacío?) con $p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda} c^2 = \frac{-c^4}{8\pi G} \Lambda$

• Ante la evidencia experimental de "expansión cosmológica" (Slipher, 1920's), Einstein consideró un "error" haber introducido Λ (innecesaria, "ad hoc", "inestable") y volvió a la ecuación sin Λ

• Predicciones "cuánticas" de un valor para Λ son inmensamente superiores (en un factor $> 10^{50}$) a la cota superior ($|\Lambda| \lesssim 10^{-55} \text{ cm}^{-2}$) puesta por las observaciones cosmológicas (enorme problema teórico). Pero hasta mitad de los 1990's las observaciones eran compatibles con $\Lambda = 0$ (y este ha sido el valor de referencia aceptado)

2. COSMOLOGÍA. LEY DE HUBBLE

2.1. Espacio-tiempos de Robertson-Walker

CINEMÁTICA. El "cosmos" (ET a gran escala) se modela por:

$$\mathbf{I} \times_f \mathbf{S} \equiv (\mathbf{M} = \mathbf{I} \times \mathbf{S} , \mathbf{g} = -c^2 dt^2 + f^2(t) \mathbf{g}_S) ,$$

ETsRobertson-Walker

para ciertos $\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{I}, -c^2 dt^2) , \text{ intervalo real (con } t_0 \in \mathbf{I} \text{ el "ahora")} \\ (\mathbf{S}, \mathbf{g}_S) , \text{ variedad riemanniana de dimensión } \mathbf{3} \text{ ("espacio-tipo")} \\ \text{y curvatura cte. } k := -1, 0 \text{ ó } 1 \text{ (prototipos: } \mathbb{H}^3, \mathbb{E}^3 \text{ ó } \mathbb{S}^3) \\ \mathbf{f} (> 0) \in C^\infty(\mathbf{I}) \text{ [L]} \text{ (factor de escala, "modula" a } \mathbf{g}_S) \end{array} \right.$

Galaxias "típicas": puntos fijos de \mathbf{S} cuya distancia mutua varía con t en la forma: $d_{PQ}^t = f(t) d_{PQ}^S$

Sobre los (ETsRW) : Observaciones sugieren que, "a gran escala" ($\gtrsim 10^8$ años-luz), existe un campo de vectores temporal, futuro y unitario (aquí $\frac{1}{c} \partial_t$) cuyas curvas integrales (que reparametrizan a las galaxias típicas) poseen:

- igual "historia" ("principio cosmológico")
- parámetro dado por alguna magnitud escalar, monótona (¿la entropía?) sobre todas ellas (aquí t , "tiempo cosmológico")
- "direcciones ortogonales equivalentes" ("isotropía espacial")

$$\text{Cálculos: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Ric}(\partial_t, \partial_t) = \frac{-3f''}{f} \\ \text{Ric}(\partial_t, \mathbf{X}) = \mathbf{0} , \text{ si } \mathbf{X} \perp \partial_t \\ \text{Ric}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left(\frac{2f'^2}{c^2 f^2} + \frac{2k}{f^2} + \frac{f''}{c^2 f} \right) \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) , \text{ si } \mathbf{X}, \mathbf{Y} \perp \partial_t \\ \text{Sc} = 6 \left(\frac{f'^2}{c^2 f^2} + \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{c^2 f} \right) \end{array} \right. \quad (4)$$

DINÁMICA. Se sigue de (4) que, si $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$ verifica la ecuación de Einstein (1), la tensión-energía \mathbf{T} debe ser la de un fluido perfecto ($\mathbf{U} \equiv \frac{1}{c} \partial_t, \rho, p$) (flujo de Robertson-Walker), con:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c^2 + \frac{c^4}{8\pi G} \Lambda := \frac{3c^4}{8\pi G} \left(\frac{f'^2}{c^2 f^2} + \frac{k}{f^2} \right) \\ p - \frac{c^4}{8\pi G} \Lambda := \frac{-c^4}{8\pi G} \left(\frac{f'^2}{c^2 f^2} + \frac{k}{f^2} + \frac{2f''}{c^2 f} \right) \end{array} \right. \quad (5) , \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{-f''}{f} = \frac{8\pi G}{3c^2} \left[\frac{1}{2}(\rho c^2 + 3p) - \frac{c^4}{8\pi G} \Lambda \right] \right] \quad (6) ;$$

de donde se deduce que $\rho c^2 + 3p > 0$ "atrae" y $\Lambda > 0$ "repele"

Por otra parte, las ecuaciones (3) resultan equivalentes a la ecuación "dinámica" (deducible también de (5))

$$\left[\rho' c^2 = -3(\rho c^2 + p) \frac{f'}{f} \right] \quad (7)$$

2.2. Datos relevantes (hasta mitad 1990's)

Cosmos (ET a gran escala) "observable":

- Tamaño $\simeq 10^{10}$ años luz, edad $\gtrsim 10^{10}$ años
- Contiene galaxias, con distribución isótropa (desde la Tierra) a gran escala ($\gtrsim 10^8$ años – luz)
- Elementos químicos: 1 átomo de helio por cada 10 de hidrógeno, y rastros de los mismos elementos que en la Tierra

LEY EMPÍRICA DE HUBBLE (1920's): Para cada galaxia, las magnitudes "observables"

$$\left\{ \begin{array}{l} z := \frac{\nu_e}{\nu_0} - 1 \quad [\text{adim.}] \quad (\text{desplazamiento de frecuencias respecto a } U) \\ \quad (\nu_e \text{ frecuencia emisión conocida, } \nu_0 \text{ frec. recepción}) \\ \\ d_l := \sqrt{\frac{l_a}{4\pi l_0}} \quad [L] \quad (\text{distancia-luminosidad}) \\ \quad (l_a \text{ lumin. absoluta supuesta conocida, } l_0 \text{ lumin. relativa}) \end{array} \right.$$

verifican: $d_l \simeq cH_0^{-1} z$ (para $z \lesssim 0.1$) ,

con $H_0 = \text{cte. } [T^{-1}]$ de Hubble $\simeq 71 \text{ Km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (WMAP 2003), o también $H_0^{-1} \simeq 13.8 \cdot 10^9$ años

RADIACIÓN DE FONDO (Penzias-Wilson, 1965), que:

- no proviene de fuentes identificables
- posee "espectro-Planck" (típico del equilibrio térmico materia-radiación) con el máximo de intensidad en la región de microondas y temperatura $\simeq 2.7$ Kelvin (COBE 1992, WMAP)
- es muy isótropa, con anisotropías de temperatura de $\simeq 10^{-5}$ Kelvin en escalas angulares de $\simeq 1$ grado (COBE, WMAP)
- combinada con desarrollos teóricos (inflación), sugiere $k = 0$ (geometría "plana")

DENSIDAD DE ENERGÍA: Denotando $\rho_0 \equiv \rho(t_0)$ y definiendo

$$\Omega_0 := \frac{\rho_0}{\rho_0^c}, \quad \text{con } \rho_0^c := 3H_0^2/8\pi G \simeq 1.0 \cdot 10^{-29} \text{ gr cm}^{-3} \quad (\text{densidad crítica}),$$

se observa:

$$\Omega_0 \equiv \underbrace{\Omega_0^{\text{radiación}}}_{\simeq 10^{-5} > 0} + \underbrace{\Omega_0^{\text{mat. ordinaria}}}_{\simeq 0.06 > 0} + \underbrace{\Omega_0^{\text{mat. oscura}}}_{\simeq 0.2 \leftrightarrow 0.3 > 0} < 0.4$$

PRESIÓN: Denotando $p_0 \equiv p(t_0)$, se observa:

$$p_0 \equiv \underbrace{p_0^{\text{radiación}}}_{=\frac{1}{3}\rho_0^{\text{radiación}}c^2 > 0} + \underbrace{p_0^{\text{mat. ordinaria}}}_{\simeq 10^{-6}\rho_0^{\text{mat. ordinaria}}c^2 > 0} + \underbrace{p_0^{\text{mat. oscura}}}_{???}$$

2.3. Cinemática. Ley de Hubble

Cualquier ETRW $\mathbf{I} \times_{\mathbf{f}} \mathbf{S}$ incorpora ("refinándola") la ley empírica de Hubble. Para ello basta simplemente definir la **función de Hubble** $\mathbf{H} := \mathbf{f}'/\mathbf{f} \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{I}) [\mathbf{T}^{-1}]$ e identificar

$$\boxed{\mathbf{H}(t_0) := \mathbf{H}_0 (> 0)}$$

Veámoslo en detalle. Sean \mathbf{P} (emisor) y \mathbf{Q} (receptor) dos galaxias típicas que intercambian fotones, con emisión en torno a t_e y recepción en torno a t_0 .

Denotando $\mathbf{f}_e \equiv \mathbf{f}(t_e)$ y $\mathbf{f}_0 \equiv \mathbf{f}(t_0)$, se demuestra (!) que:

• El desplazamiento de frecuencias \mathbf{z} da la "relación de tamaños" del cosmos entre emisión y recepción (no es debido a un Doppler!):

$$\mathbf{z} := \frac{\nu_e}{\nu_0} - 1 \stackrel{!}{=} \frac{\mathbf{f}_0}{\mathbf{f}_e} - 1 \quad (\Rightarrow 1 - \frac{\mathbf{f}_e}{\mathbf{f}_0} = \frac{\mathbf{z}}{1 + \mathbf{z}}) \quad (8)$$

• La distancia (adimensional, en el espacio-tipo \mathbf{S}) entre los puntos fijos \mathbf{P} y \mathbf{Q} viene dada por el "tiempo conforme" transcurrido entre emisión y recepción (para $\mathbf{k} = 1$, cuando la integral es $\leq \pi$):

$$d_{\mathbf{PQ}}^{\mathbf{S}} \stackrel{!}{=} \int_{t_e}^{t_0} \frac{c dt}{\mathbf{f}(t)} = c \int_{\mathbf{f}_e}^{\mathbf{f}_0} \frac{d\mathbf{f}}{\mathbf{f}\mathbf{f}'} \quad (9),$$

siendo la última igualdad válida sólo si $\mathbf{f}(t)$ es estrictamente monótona entre t_e y t_0 (pero recordar que $\mathbf{H}_0 > 0$)

• La distancia-luminosidad verifica (usa (8)):

$$d_1 := \sqrt{\frac{l_a}{4\pi l_0}} \stackrel{!}{=} (1 + \mathbf{z}) \mathbf{f}_0 \eta(d_{\mathbf{PQ}}^{\mathbf{S}}) \quad (10),$$

siendo $\eta(\psi) := \sinh\psi$, ψ ó $\sin\psi$ según que $\mathbf{k} = -1$, 0 ó 1 (en el espacio-tipo \mathbf{S} , la 2-esfera de radio ψ tiene área $4\pi\eta^2(\psi)$). Así d_1 "distorsiona" la distancia actual $d_{\mathbf{PQ}}^{\mathbf{t}_0} = \mathbf{f}_0 d_{\mathbf{PQ}}^{\mathbf{S}}$ entre las galaxias \mathbf{P} y \mathbf{Q} en la medida en que es $\mathbf{z} \neq 0$ ó $\mathbf{k} \neq 0$.

La LEY DE HUBBLE en el ETRW es (por definición) la dependencia $d_1(\mathbf{z})$ que surge de (8) – (10). Desarrollando (9) (como función de \mathbf{f}_e) en $\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_0$ y usando (8), se obtiene

$$d_{\mathbf{PQ}}^{\mathbf{S}} = \frac{c}{\mathbf{f}_0'} \left[\left(\frac{\mathbf{z}}{1 + \mathbf{z}} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mathbf{f}_0 \mathbf{f}_0''}{\mathbf{f}_0'^2} \right) \left(\frac{\mathbf{z}}{1 + \mathbf{z}} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\mathbf{z}}{1 + \mathbf{z}} \right)^3 \right) \right];$$

y desarrollando (10) (como función de $d_{\mathbf{PQ}}^{\mathbf{S}}$) en $d_{\mathbf{PQ}}^{\mathbf{S}} = 0$ y usando la expresión que acabamos de obtener y $\mathbf{H}_0 = \mathbf{f}_0'/\mathbf{f}_0$, se concluye

$$\boxed{d_1 = c\mathbf{H}_0^{-1} \left[\mathbf{z} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mathbf{f}_0 \mathbf{f}_0''}{\mathbf{f}_0'^2} \right) \mathbf{z}^2 + \mathcal{O}(\mathbf{z}^3) \right]} \quad (11),$$

que efectivamente incorpora y "refina" la ley empírica de Hubble

3. COSMOLOGÍA. DINÁMICA

3.1. Modelos de Friedmann

Un **modelo de Friedmann** es un ETRW $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$ tal que: (a) verifica la ecuación de Einstein, (b) su flujo de Robertson-Walker $(\frac{1}{c}\partial_t, \rho, \mathbf{p})$ consta de un fluido perfecto de radiación ($\rho^{\text{rad}}c^2 = 3p^{\text{rad}} > 0$) más un polvo de materia ($\rho^{\text{mat}}c^2 > 3p^{\text{mat}} = 0$) sin interacción mutua, y (c) la función de Hubble \mathbf{H} cumple $\mathbf{H}(t_0) = \mathbf{H}_0 > 0$

Un modelo de Friedmann incorpora los datos "conocidos" sobre ρ_0 y \mathbf{p}_0 y añade las hipótesis (retroalimentación con más datos!):

- $\rho^{\text{rad}} > 0$ y $\rho^{\text{mat}} > 0$ evolucionan independientemente (interflujos de energía no modifican las densidades de energía) y
- $\mathbf{p}^{\text{mat}} = 0$ ($\Rightarrow \mathbf{p}^{\text{mat.oscura}} = 0$ / CDM), con lo que $\mathbf{p}_0 \simeq 0$

En un modelo de Friedmann la ecuación (7) da lugar a dos ecuaciones independientes

$$\begin{cases} \rho^{\text{rad}'} = -4\rho^{\text{rad}}f'/f & , \Rightarrow \frac{8\pi G}{3}\rho^{\text{rad}}f^4 \equiv C^{\text{rad}} = \text{cte. } [\mathbf{L}^4\mathbf{T}^{-2}] \\ \rho^{\text{mat}'} = -3\rho^{\text{mat}}f'/f & , \Rightarrow \frac{8\pi G}{3}\rho^{\text{mat}}f^3 \equiv C^{\text{mat}} = \text{cte. } [\mathbf{L}^3\mathbf{T}^{-2}] \end{cases} ;$$

sustituyendo $\rho \equiv \rho^{\text{rad}} + \rho^{\text{mat}}$ en la primera de las ecs. (5) se obtiene:

$$\text{(EC. DE FRIEDMANN)} \quad \boxed{f'^2 + c^2k = \frac{C^{\text{rad}}}{f^2} + \frac{C^{\text{mat}}}{f} + \frac{c^2\Lambda}{3}f^2} \quad (12)$$

PASADO: Puesto que $\mathbf{H}_0 > 0$, se sigue de (12) que el pasado del cosmos es cualitativamente independiente de \mathbf{k} y Λ .

En particular: $f' > 0$ en el pasado y (suponiendo \mathbf{I} "maximal" para \mathbf{f}) existió $t_* := \inf \mathbf{I}$ (tomando $\Lambda = 0$ resulta $t_0 - \mathbf{H}_0^{-1} < t_*$), con límites (**gran explosión**)

$$\lim_{t \rightarrow t_*} f(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow t_*} f'(t) = \infty \quad (\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_*} \rho(t) = \infty) ;$$

multitud de experimentos y modelos de física de partículas avalan la ocurrencia de un estado muy próximo a dicho límite

FUTURO: Por el contrario, se sigue también de (12) que el futuro del cosmos depende de \mathbf{k} y Λ . El análisis detallado es prolijo

En particular, tomando $\Lambda = 0$ (la dicotomía en boga hasta mitad de los 1990's) y suponiendo \mathbf{I} "maximal" para \mathbf{f} , se tiene:

- Si $\mathbf{k} = -1$ ó $\mathbf{k} = 0$, entonces $f' > 0$ en el futuro, no existirá $\sup \mathbf{I}$ (**expansión indefinida**) y $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0$.

- Si $\mathbf{k} = 1$, entonces \mathbf{f} alcanzará un máximo después de t_0 y existirá $t^* := \sup \mathbf{I}$ con límites (**gran implosión**)

$$\lim_{t \rightarrow t^*} f(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow t^*} f'(t) = -\infty \quad (\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t^*} \rho(t) = \infty)$$

3.2. Constante positiva. Consecuencias

Sean $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$ un modelo de Friedmann y $\Omega_{0\Lambda} := \frac{c^2 \Lambda / 8\pi G}{\rho_0^c} = \frac{c^2 \Lambda}{3H_0^2}$.

- Se sigue de la primera de las ecs. (5) (recordar que $H_0 > 0$):

$$\boxed{\frac{c^2 k}{f_0'^2} = \frac{1}{\rho_0^c} (\rho_0 + \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}) - 1 = \Omega_0 + \Omega_{0\Lambda} - 1} \quad (13)$$

Junto con $k = 0$ (sugerido como dijimos por las observaciones de la radiación de fondo), la expresión (13) conduce a: $\Omega_0 + \Omega_{0\Lambda} = 1'0$.

- Por otra parte, se sigue de (6) y $p_0 \simeq 0$:

$$\boxed{\frac{-f_0 f_0''}{f_0'^2} \simeq \frac{1}{\rho_0^c} (\frac{1}{2} \rho_0 - \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}) = \frac{1}{2} \Omega_0 - \Omega_{0\Lambda}} \quad (14)$$

Junto con (13), $k = 0$ y $\Omega_0 < 0'4$, la expresión (14) conduce a $f_0'' > 0$ (contra todo pronóstico)

- Pues bien, recientes observaciones (Riess-Perlmutter, finales 1990's) indican que las **supernovas Ia** (desde 1990's, luminosidad absoluta l_a conocida) exhiben una d_l mayor ("brillan menos", $\simeq 25\%$) de "lo esperado" ($f_0'' \leq 0$). Usando el desarrollo (11), resulta que efectivamente **LA EXPANSIÓN SE ESTÁ ACELERANDO**:

$$\boxed{\frac{f_0 f_0''}{f_0'^2} \simeq 0'60 (> 0)} \quad (15)$$

Junto con (13), $k = 0$ y (14), la expresión (15) conduce a:

$$\boxed{\Omega_0 \simeq 0'27} \quad (\Rightarrow \Omega_0^{\text{mat. oscura}} \simeq 0'21) \quad \text{y} \quad \boxed{\Omega_{0\Lambda} \simeq 0'73} \quad (16)$$

($\Rightarrow \Lambda \simeq 0'73 \cdot 3H_0^2/c^2 \simeq 1'4 \cdot 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$, CONSTANTE POSITIVA)

CONSECUENCIAS: Excepto muy cerca de la gran explosión, la ec. de Friedmann (12) puede escribirse sin el término de radiación. Si $k = 0$, queda: $f'^2 = \frac{C^{\text{mat}}}{f} + \frac{c^2 \Lambda}{3} f^2$, integrable elementalmente. Y si $\Lambda > 0$, la solución (**modelo Λ CDM**) es (eligiendo $t_* = 0$, con lo que t_0 resulta la "edad del cosmos")

$$\boxed{f(t) = K (\cosh(\sqrt{3 c^2 \Lambda} t) - 1)^{1/3}} \quad , \quad \text{con} \quad K^3 \equiv \frac{3C^{\text{mat}}}{2 c^2 \Lambda} \quad \rightsquigarrow$$

- Habrá **EXPANSIÓN INDEFINIDA**, con f'' creciente y $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f f''}{f'^2} = 1$
- Se sigue de (5): $\rho = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G} \frac{2}{\cosh(\sqrt{3 c^2 \Lambda} t) - 1}$. Y usando (16) se concluye $t_0 \simeq 13'7 \cdot 10^9$ años (acuerdo con WMAP y otros datos)
- Hubo **CAMBIO DE SIGNO** en la aceleración en una época $t_{\text{cambio}} = \frac{\text{arccosh } 2}{3H_0 \sqrt{\Omega_{0\Lambda}}}$. Y usando (16) se concluye: $t_{\text{cambio}} \simeq 7'1 \cdot 10^9$ años (acuerdo con ciertas observaciones de supernovas Ia con $1 < z < 2$)