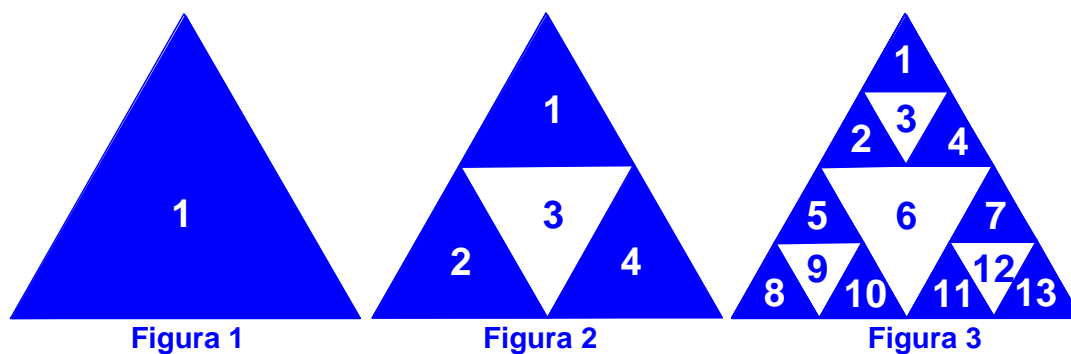


¿Y para n ?

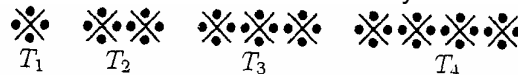
Algunas propuestas para guiar a nuestros alumnos a hacer conjeturas.

María Moreno Warleta

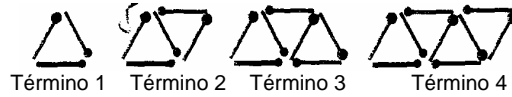


¿Y para n ?

1.- Observa los primeros términos de las sucesiones y contesta:



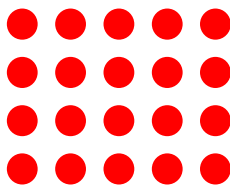
¿Cuántas aspas hay en T_{1500} ? ¿Cuántos puntos hay en T_{1500} ?



¿Cuántos triángulos hay en T_{532} ? ¿Cuántas cerillas hay en T_{532} ?



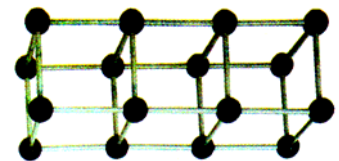
Cada estrella tiene 16 puntas. ¿Cuántas estrellas tiene T_n ? ¿Y cuántas puntas?



2.- En un rectángulo como éste, de 4 x 5, hay 14 puntos en la frontera ¿Cuántos puntos habrá en la frontera de un rectángulo de 2007 x 2008?

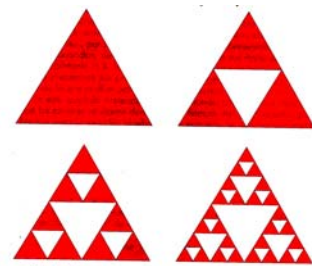
3.- ¿Cuánto vale la suma de todas las cifras del número $10^{2007} - 1$? ¿Y de $10^{2007} - 37$?

4.- Une un vértice de un cuadrilátero con todos los demás vértices. ¿Cuántos triángulos se forman? ¿Y si lo haces en un pentágono? ¿Cuántos triángulos se forman al unir un vértice de un polígono de n lados con todos los demás vértices? ¿Cuánto vale la suma de los ángulos de un polígono de n lados?



5.- ¿Cuántos palillos y cuántas bolitas necesitarás para formar 20 cubos? ¿Y dos pisos de 20 cubos cada uno?

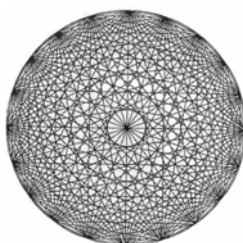
6.- En un bar hay mesitas de cuatro. Uniendo tres de ellas pueden sentarse 8 personas. ¿Cuántas personas pueden sentarse si unimos 20? ¿Cuántas mesas debemos unir para sentar a 19 personas? ¿Y para sentar a 233?



7.- TRIÁNGULO DE SIERPINSKI
¿Podrías explicar como se construye la serie? Si el área de la parte coloreada en el primer triángulo es 1 u^2 . ¿Cuál es el área de la parte coloreada en el cuarto triángulo? ¿Y en el decimoprimer?

8.- En septiembre de 2006 se encontró el número primo mayor conocido hasta el momento. Se trata del número $2^{32582657} - 1$. ¿En qué cifra acaba?

9.- En el estanco sólo quedan sellos de 0,10 € y de 0,20 €. ¿De cuántas formas distintas podrás franquear una carta con 0,40 €? ¿Y una con 2 €? ¿Y con $n \times 0,10$ €?



10.- EL ROSETÓN
El diagrama está hecho uniendo entre sí los 20 puntos del círculo.
¿Cuántas líneas hay en total?
¿Cuántas líneas habría con 100 puntos? ¿Y con mil?

Pautas en construcciones

1. ¿Cuántos cuadrados azules y cuántos blancos necesitaré para hacer la figura número 500? (Dirichlet Student Notes. AMT)

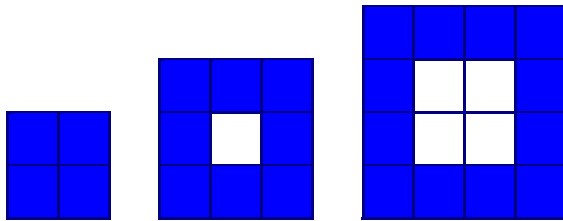
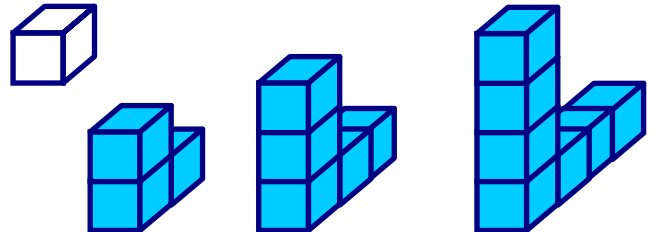


Figura 1

Figura 2

Figura 3

2. Con cubos blancos hacemos construcciones en forma de L y una vez armadas las pintamos de azul. En la construcción 500, ¿cuántas caras pintaré? (Dirichlet Student Notes. AMT)



Construcción 1

Construcción 2

Construcción 3

3. **La región perdida:** ¿Cuántas regiones, a lo sumo, se forman dentro de un círculo si unimos dos a dos n puntos sobre su circunferencia?



Juegos con pautas

Las ranas saltarinas (<http://www.albinoblacksheep.com/flash/frog>)



Objetivo: intercambiar la posición de las ranas.

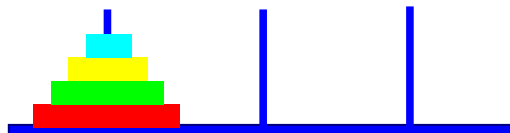
Reglas del juego:

- Una rana puede saltar al cuadrado contiguo o saltar por encima de otra rana al cuadrado siguiente si está libre.
- No se puede saltar por encima de más de una rana.
- Las ranas sólo pueden avanzar, nunca retroceder.

¿Cuántos movimientos son necesarios con 8 ranas?

¿Y con 100 ranas?

Las torres de Hanoi (<http://www.aulademate.com/contentid-99.html>)



Objetivo: llevar los discos de la varilla izquierda a la varilla derecha.

Reglas del juego:

- No se puede desplazar más de un disco en cada movimiento.
- Un disco sólo se puede apoyar sobre otro de diámetro mayor.

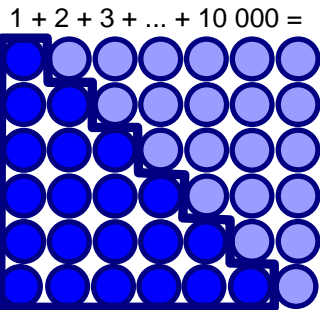
¿Cuál es el mínimo número de movimientos para 4 discos?

¿Y para 64 discos?

Pautas numéricas

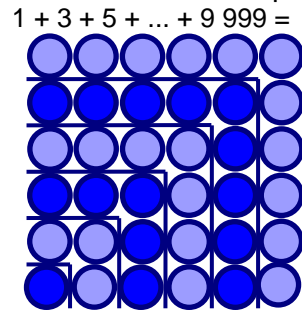
1. Piensa un número de dos cifras. Réstale la suma de sus cifras, ¿qué observas?
 (http://www.cyberpadres.com/juegos/jugar/pensamiento_lectura.htm)

2. ¿Cuánto suman los diez primeros números enteros? ¿Y los diez mil primeros números enteros?



Demostraciones sin palabras

3. ¿Cuánto suman los veinte primeros números enteros impares? ¿Y los cinco mil primeros números enteros impares?



Demostraciones sin palabras

El número 6174

(El ingenio en las matemáticas)

Piensa un número de 4 cifras no todas iguales.
 Reordena las cifras para obtener el mayor y el menor número posible.
 Calcula la diferencia de entre estos dos números.
 Repite el proceso unas cuantas veces con los números que vas obteniendo.

¿Qué observas?

$$a \geq b \geq c \geq d$$

$$M = 1000 a + 100 b + 10 c + d$$

$$N = 1000 d + 100 c + 10 b + a$$

$$M - N = 999 (a - d) + 90 (b - c)$$

Observa que, como $a \geq b \geq c \geq d$,

$$0 < a - d \leq 9$$

$$0 \leq b - c \leq a - d$$

Si $a - d = 1$ entonces $b - c = 0$ ó 1 y
 $M - N = 999 (a - d) + 90 (b - c) = 999$ ó 1089 .

Si $a - d = 2$ entonces $b - c = 0, 1$ ó 2 y
 $M - N = 999 (a - d) + 90 (b - c) = 1998, 2088$ ó 2179

Si $a - d = 3 \dots$

En total debemos considerar: $2 + 3 + \dots + 10 = 54$ casos, pero algunos de ellos son equivalentes.

| | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0999 | 1089 | 1998 | 2088 | 2178 | 2997 | 3087 | 3177 | 3267 |
| 3996 | 4086 | 4176 | 4266 | 4356 | 4995 | 5085 | 5175 | 5265 |
| 5355 | 5445 | 5994 | 6084 | 6174 | 6264 | 6354 | 6444 | 6534 |
| 6993 | 7083 | 7173 | 7263 | 7353 | 7443 | 7533 | 7623 | 7992 |
| 8082 | 8172 | 8262 | 8352 | 8442 | 8532 | 8622 | 8712 | 8991 |
| 9081 | 9171 | 9261 | 9351 | 9441 | 9531 | 9621 | 9711 | 9801 |

Cada uno de estos 30 casos alcanza el 6174 en menos de 7 pasos.

Conjeturas, teoremas y contraejemplos

Observa que:

$$2^2 - 1 \text{ es divisible por } 3$$

$$2^4 - 1 \text{ es divisible por } 5$$

$$2^6 - 1 \text{ es divisible por } 7$$

¿Qué puedes decir de $2^n - 1$? (Excursions in calculus)

Es claro que si n es impar $n + 1$ no divide a $2^n - 1$

Probando para los primeros números pares observamos que:

$2^n - 1$ es divisible por $n + 1$ para $n + 1 = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$

$2^n - 1$ no es divisible por $n + 1$ para $n + 1 = 9, 15, 21, 25, 27$

Conjetura 1: Si p es un número primo entonces $2^p - 1$ es divisible por p .

El pequeño teorema de Fermat:

Si a es un número natural y p un primo que no divide a a , entonces $a^{p-1} - 1$ es múltiplo de p .

Demostración: Consideramos: $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a \Rightarrow ka = p \cdot$ con $c_k + r_k \quad r_k \neq r_j$ si $k \neq j$

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a = p \cdot C + r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_k \Rightarrow (p-1)! a^{p-1} = p \cdot C + (p-1)!$$

$$\Rightarrow p \text{ divide a } (p-1)! (a^{p-1} - 1) \Rightarrow p \text{ divide a } (a^{p-1} - 1)$$

Conjetura 2: Si $n+1$ no es un número primo entonces $2^n - 1$ no es divisible por $n+1$.

Contraejemplo: La conjetura falla por primera vez para $n = 340$ (Sarrus 1819).

$$2^{340} - 1 = (2^5)^{68} - 1 = x^{68} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^{66} + \dots + 1) = 31 \cdot 33 (x^{66} + \dots + 1) = 341 \cdot k$$

Tres conjeturas famosas

(Excursions in Calculus)

Conjetura de Goldbach (1742): Todo número par mayor que 2 se puede escribir como suma de dos números primos.

El problema $3x + 1$:

Comienza con un número natural cualquiera.

Si es par, divídelo entre 2.

Si es impar, multiplícalo por 3 y súmale 1.

Repite el proceso.

Conjetura: Todo número natural produce una secuencia que finalmente acaba en 4, 2, 1.

Ejemplo:

$$17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$$

Conjetura de los capicúas:

Piensa un número. Invierte sus cifras. Suma esos dos números. Repite la operación con el resultado obtenido.

Conjetura: Tarde o temprano obtendrás un número capicúa.

Ejemplos:

$$235 + 532 = 767$$

$$139 + 931 = 1070; 1070 + 0701 = 1771$$

Bibliografía:

Dirichlet Student Notes y Newton Students Notes

Mathematics Challenge for Young Australians
Enrichment Stage
AMT Publishing
<http://www.amtt.com.au/>

Demostraciones sin palabras

Roger B. Nelsen
Ed. Proyecto Sur
ISBN 84 8254 160 9

El ingenio en las matemáticas

Ross Honsberger
La tortuga de Aquiles
ISBN 85731 14 X

Excursions in Calculus

Robert M. Young
The Mathematical Association of America
ISBN 0 88385 317 5

Huevos, nudos y otras mistificaciones matemáticas

Martin Gardner
Gedisa Editorial
ISBN 84 7432 933 7

Damas, parábolas y más mistificaciones matemáticas

Martin Gardner
Gedisa Editorial
ISBN 84 7432 934 5

Mathematical Circles (Russian Experience)

Fomin, Genkin e Itenberg
American Mathematical Society
ISBN 0 8218 0430 8

Problemas con pautas y números

Shell Centre for Mathematical Education
Ed. Universidad del País Vasco
ISBN 788475854458

Las ranas saltarinas

<http://www.albinoblacksheep.com/flash/frog>

Las torres de Hanoi

<http://www.aulademate.com/contentid-99.html>

Lectura del pensamiento

http://www.cyberpadres.com/juegos/jugar/pensamiento_lectura.htm