¿Y para n?

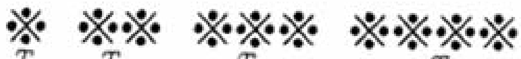
Algunas propuestas para guiar a nuestros alumnos a hacer conjeturas

María Moreno Warleta

Las matemáticas en el aula y en
el mundo real

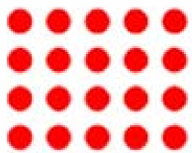
¿Y para n?

1.- Observa los primeros términos de las sucesiones y contesta:



¿Cuántas aspas hay en T_{1500}? ¿Cuántos puntos hay en T_{1500}?

¿Cuántos triángulos hay en T_{532}? ¿Cuántas cerillas hay en T_{532}?

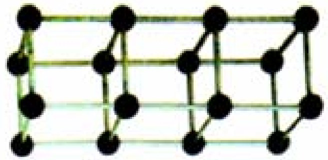


2.- En un rectángulo como éste, de 4×5, hay 14 puntos en la frontera ¿Cuántos puntos habrá en la frontera de un rectángulo de 2005×2006?

3.- ¿Cuánto vale la suma de todas las cifras del número $10^{2007} - 1$? ¿Y de $10^{2007} - 37$?

4.- Une un vértice de un cuadrilátero con todos los demás vértices. ¿Cuántos triángulos se forman? ¿Y si lo haces en un pentágono? ¿Cuántos triángulos se forman al unir un vértice de un polígono de n lados con todos los demás vértices? ¿Cuánto vale la suma de los ángulos de un polígono de n lados?

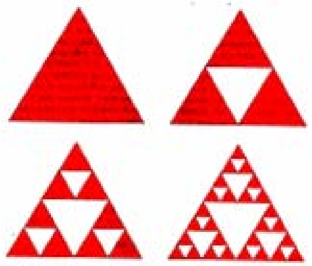
5.- ¿Cuántos palillos y cuántas bolitas necesitarás para formar 20 cubos? ¿Y dos pisos de 20 cubos cada uno?



6.- En un bar hay mesitas de cuatro. Uniendo tres de ellas pueden sentarse 8 personas. ¿Cuántas personas pueden sentarse si unimos 20? ¿Cuántas mesas debemos unir para sentar a 19 personas?

7.- TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

¿Podrías explicar como se construye la serie? Si el área de la parte coloreada en el primer triángulo es 1 u^2. ¿Cuál es el área de la parte coloreada en el cuarto triángulo? ¿Y en el undécimo?



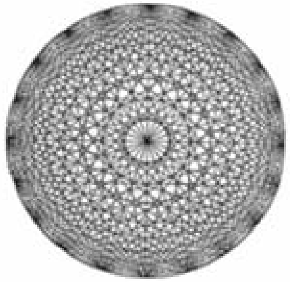
8.- Hace unos años se encontró el último número primo conocido hasta el momento. Se trata del número $2^{216091} - 1$. ¿En qué cifra acaba?

9.- En el estanco sólo quedan sellos de 0,10 € y de 0,20 €. ¿De cuántas formas distintas podrás franquear una carta con 0,40 €? ¿Y una con 2 €? ¿Y con $n \times 0{,}10$ €?

10.- EL ROSETÓN

El diagrama está hecho uniendo entre sí los 20 puntos del círculo.¿Cuántas líneas hay en total?

¿Cuántas líneas habría con 100 puntos? ¿Y con mil?



Decálogo de la didáctica de las matemáticas **Polya**

1. Interésate por tu materia.
2. Conoce bien tu materia.
3. Conoce las maneras de aprender. El mejor método es el activo.
4. Trata de leer las caras de los estudiantes. Ponte en su lugar.
5. No te limites sólo a dar información a los alumnos, sino trata de desarrollar en ellos actitudes y hábitos.
6. **Enséñales a conjeturar.**
7. Enséñales a demostrar.
8. Busca métodos de resolución que sirvan para distintas situaciones.
9. No lances tu secreto de una vez. Recuerda lo que dijo Voltaire: «El arte de ser aburrido consiste en decirlo todo».
10. Deja que los estudiantes hagan preguntas. Deja que los estudiantes den respuestas. Evita responder preguntas no planteadas.

Decálogo de la didáctica de las matemáticas

Puig Adam

1. No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.
2. No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.
3. Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.
4. Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.
5. **Enseñar, guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.**
6. Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objetivo del conocimiento.
7. Promover en todo lo posible la autocorrección.
8. Conseguir cierta maestría en las soluciones, antes de automatizarlas.
9. Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.
10. Procurar que en todo momento el alumno obtenga éxitos que eviten su desaliento.

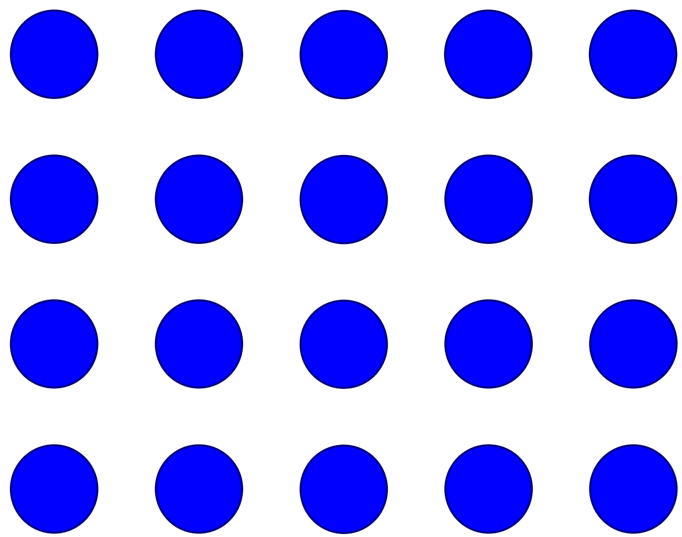
Buscando pautas

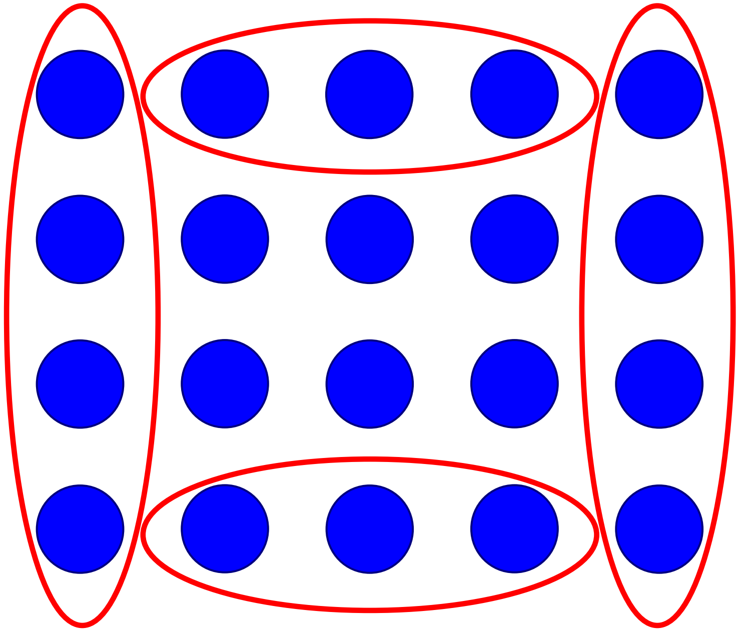
- En construcciones
- En juegos
- Numéricas

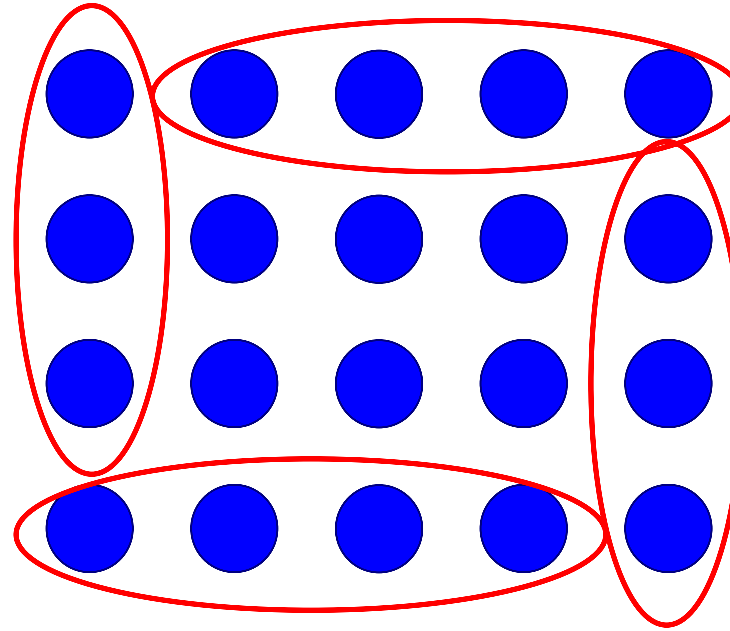
Pautas en construcciones

En un rectángulo como este, de 4 x 5, hay 14 puntos en la frontera

¿Cuántos puntos habrá en la frontera de un rectángulo de n x m?

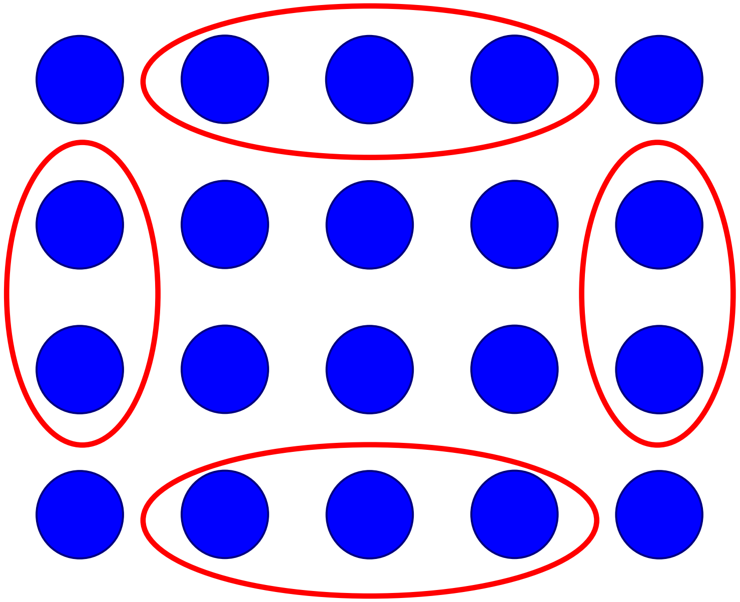


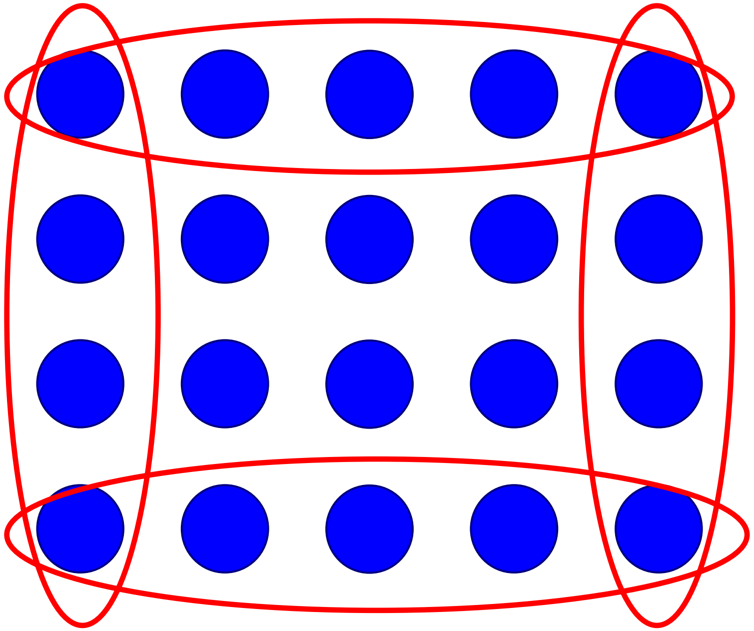




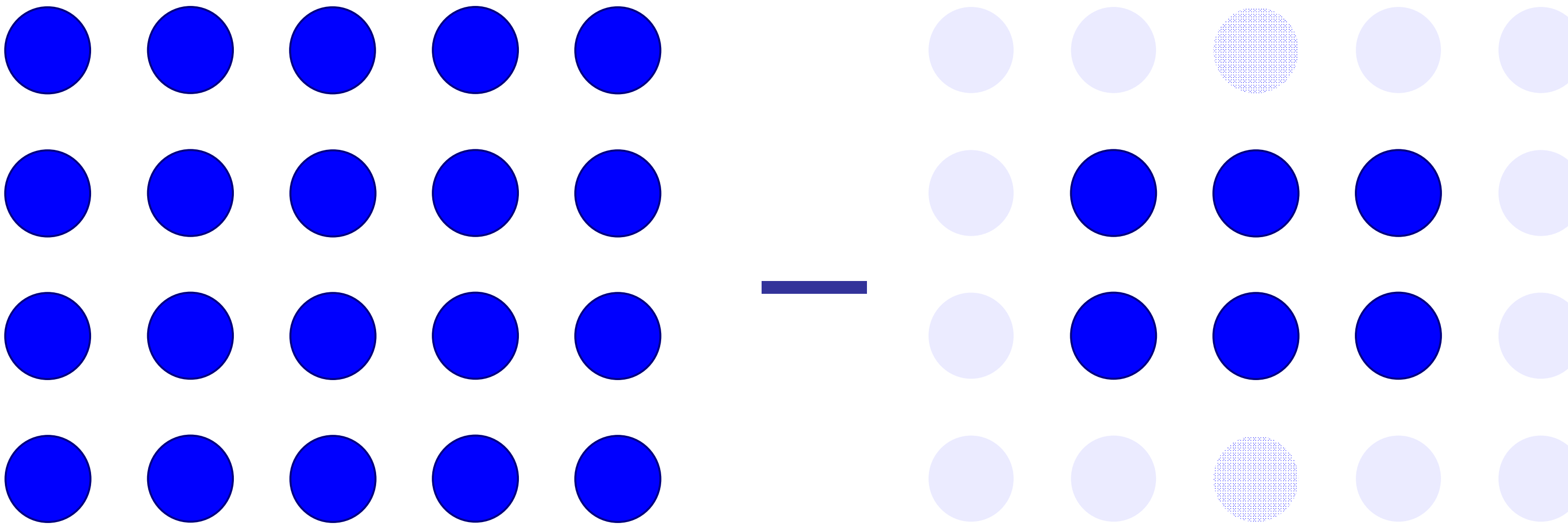
$$2n + 2(m - 2)$$

$$2(n - 1) + 2(m - 1)$$





$$2(n-2)+2(m-2)+4 \qquad\qquad 2n+2m-4$$



$$n \cdot m \quad - \quad (n-2)\cdot(m-2)$$

$2(n-1)+2(m-1)$

$2n+2(m-2)$

$nm-(n-2)(m-2)$

$2(n-2)+2(m-2)+4$

$2n+2m-4$

¿Cuántos cuadrados azules y cuántos blancos necesitaré para hacer la figura número 500?

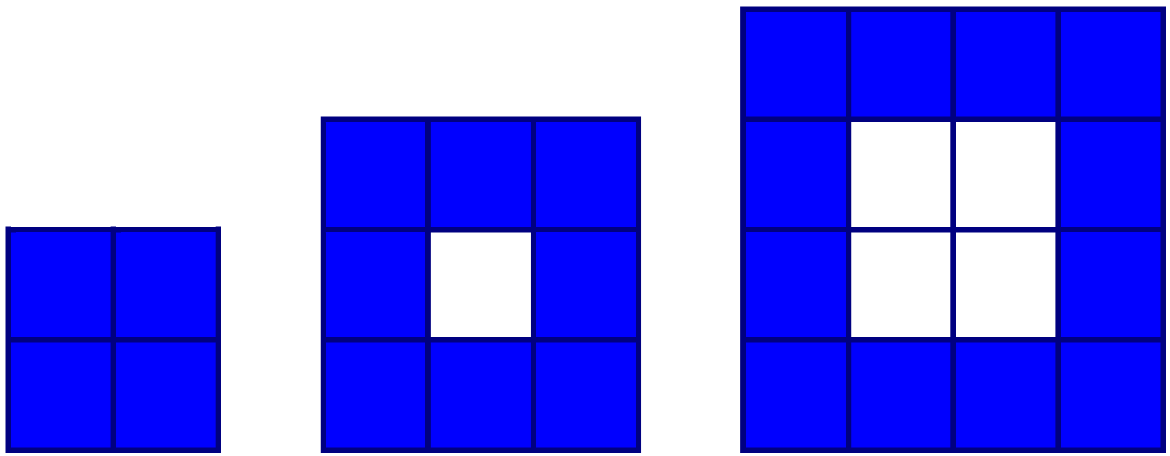
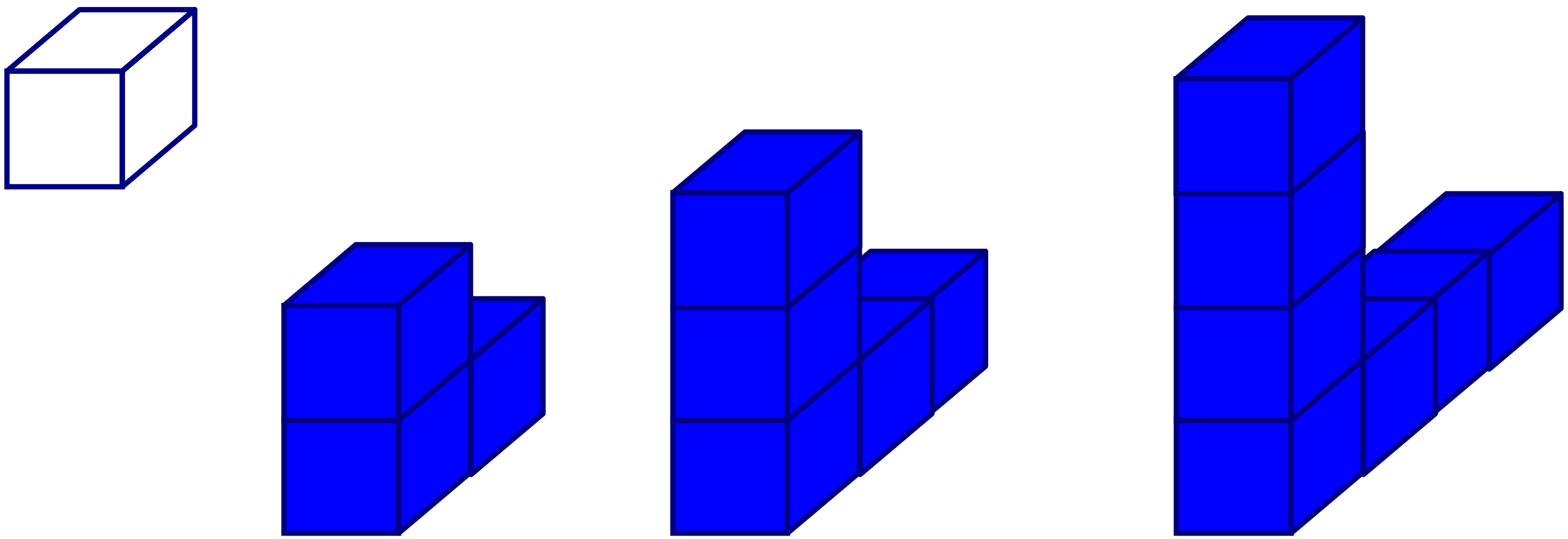


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Dirichlet Student Notes. AMT

Con cubos blancos hacemos construcciones en forma de **L** y una vez armadas las pintamos de azul. En la construcción 500, ¿cuántas caras pintaré?



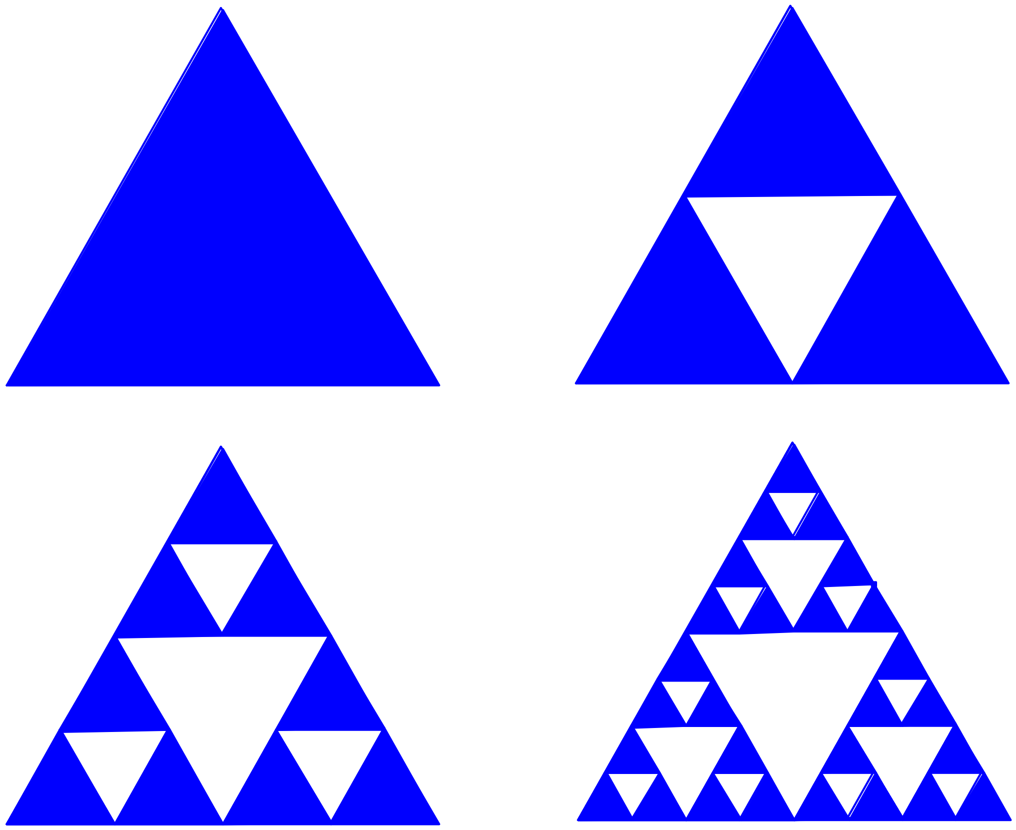
Construcción 1 Construcción 2 Construcción 3

Dirichlet Student Notes. AMT

Las matemáticas en el aula y en el mundo real

Los triángulos de Sierpinski

¿Qué fracción del área del triángulo grande es azul?



¿Cuántos triángulos habrá en la enésima figura?

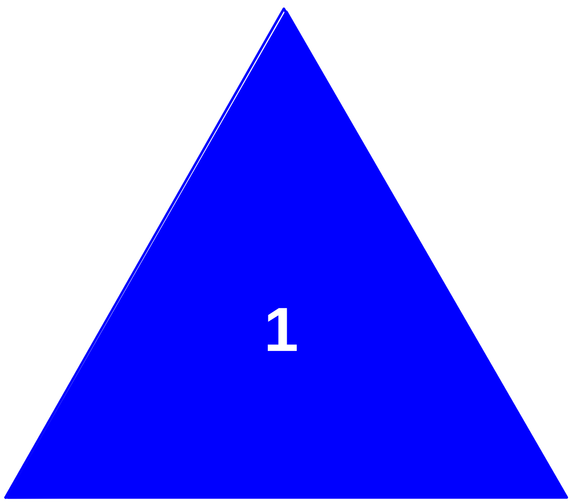


Figura 1

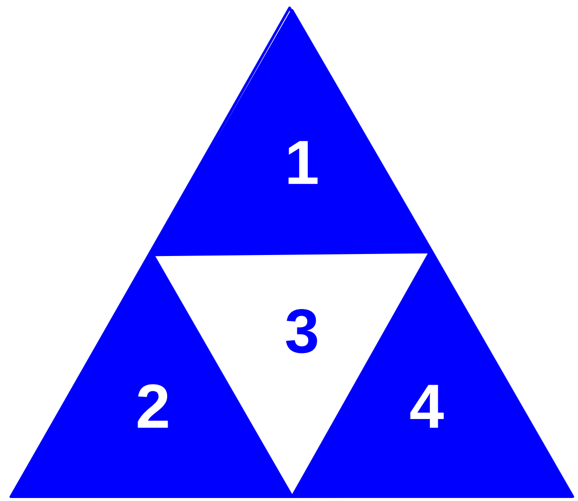


Figura 2

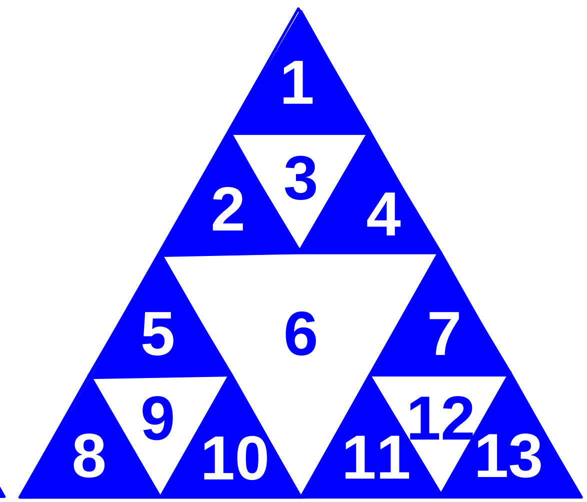
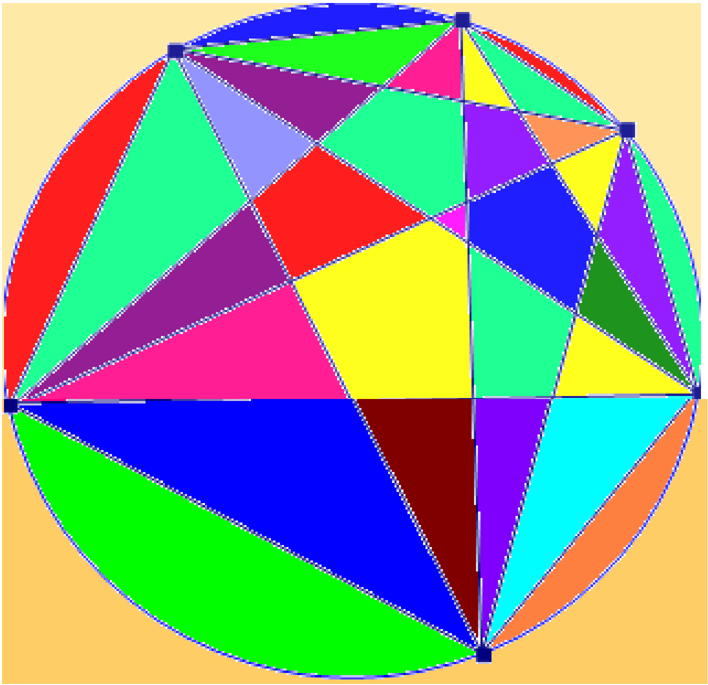
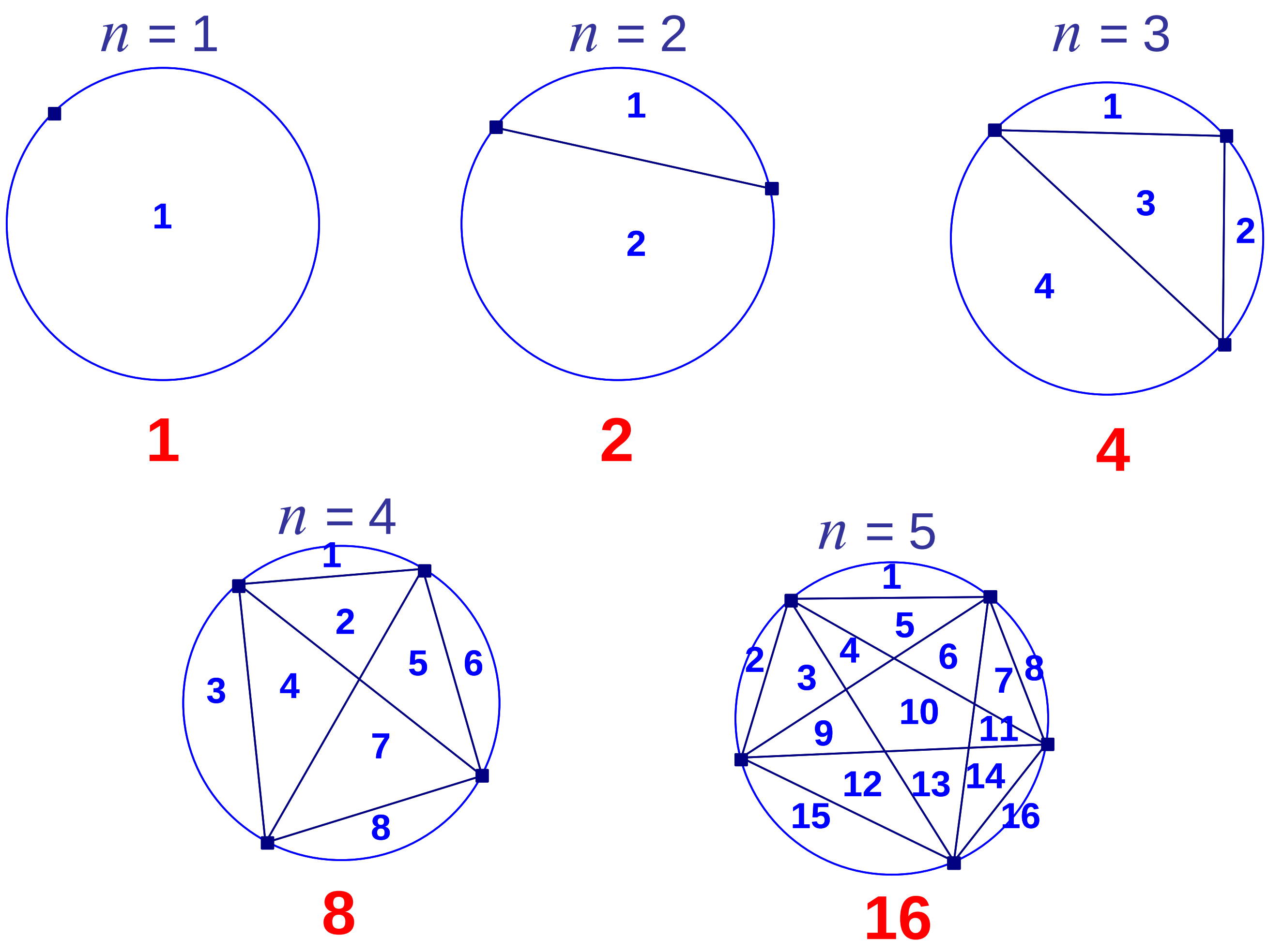


Figura 3

¿Cuántas regiones, a lo sumo, se forman dentro de un círculo si unimos dos a dos n puntos sobre su circunferencia?

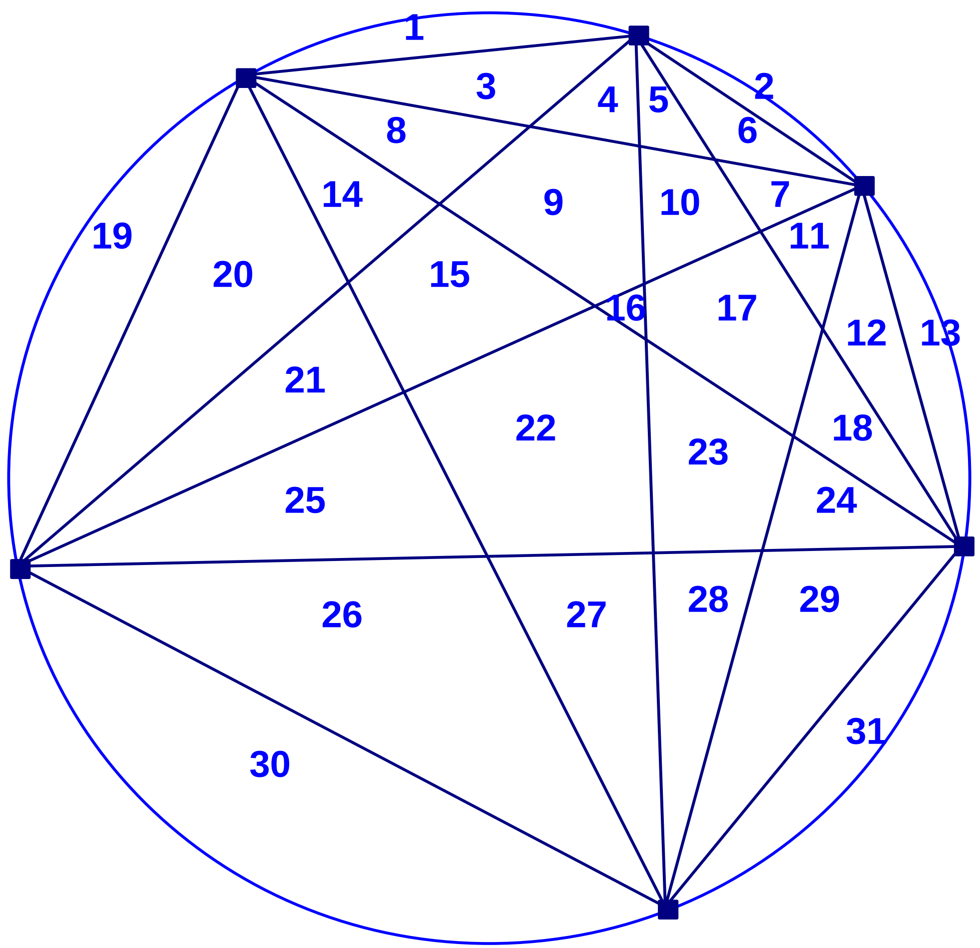



n = 1
1
1
n = 2
1
2
2
n = 3
1
3
2
4
4
n = 4
1
2
5
6
3
4
7
8
8
n = 5
1
5
2
4
6
7
8
3
10
9
11
12
13
14
15
16
16

Conjetura

Para n puntos se formarán $2^{(n-1)}$ regiones

$n = 6$

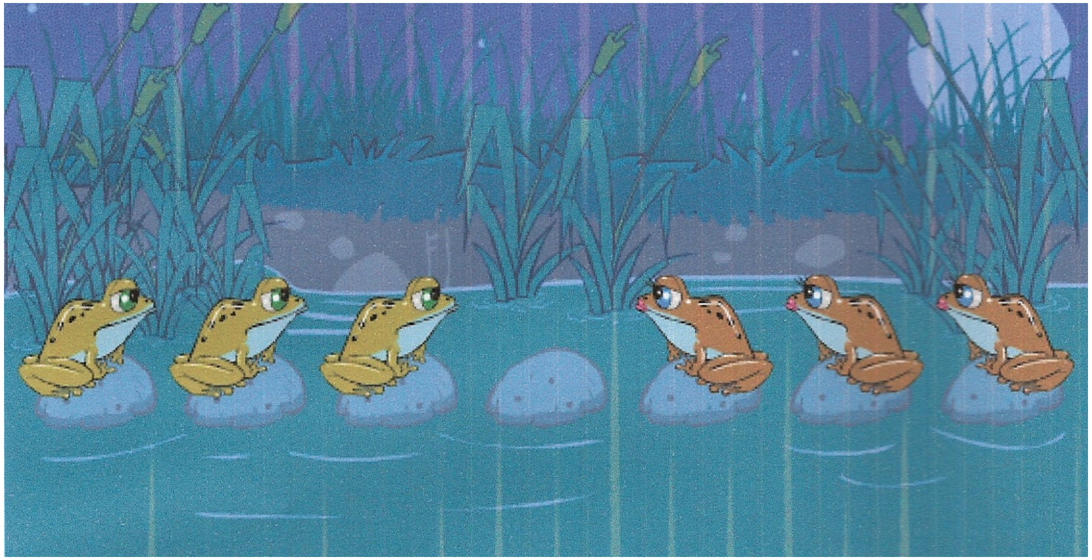


¡¡¡31!!!

Las matemáticas en el aula y en el mundo real

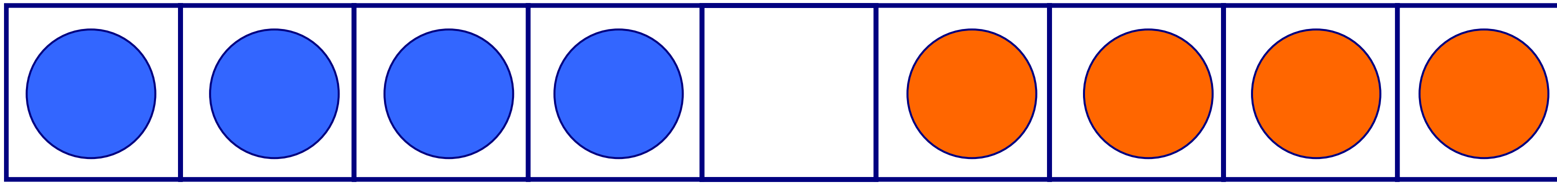
Juegos con pautas

Las ranas saltarinas



http://www.albinoblacksheep.com/flash/frog

Las ranas saltarinas



Objetivo: intercambiar la posición de las ranas.

Reglas del juego:

•Una rana puede saltar al cuadrado contiguo o saltar por encima de otra rana al cuadrado siguiente si está libre.

•No se puede saltar por encima de más de una rana.

•Las ranas sólo pueden avanzar, nunca retroceder.

¿Cuántos movimientos son necesarios con 4 ranas de cada color? ¿Y con 50 ranas?

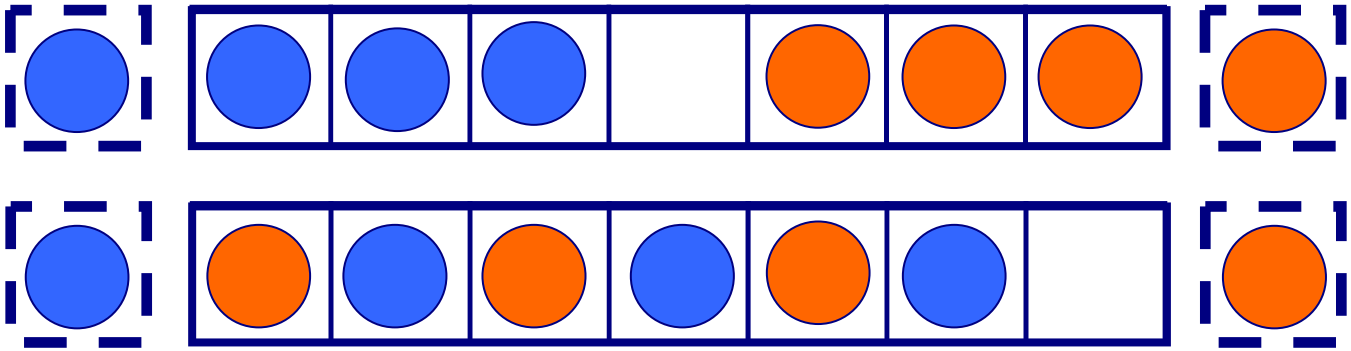
Para 2 ranas son necesarios 8 movimientos

Para 3 ranas son necesarios 15 movimientos

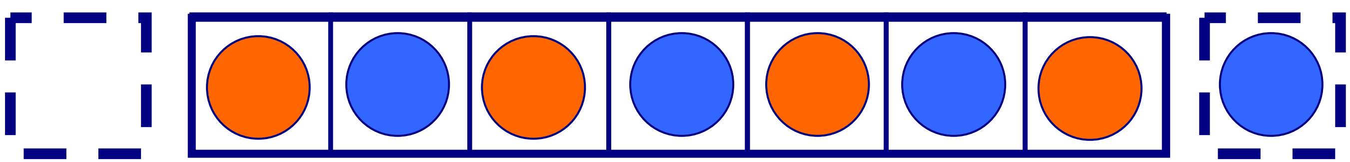
Para 4 ranas son necesarios 24 movimientos

Para 5 ranas son necesarios 35 movimientos

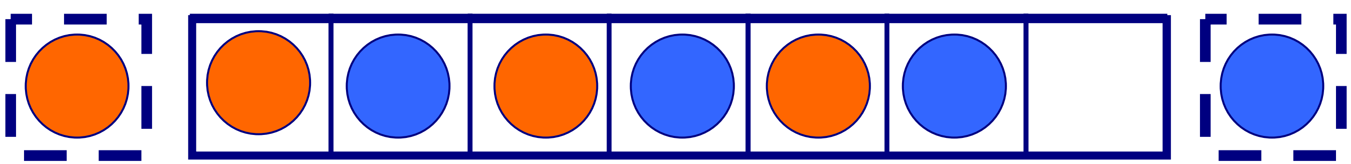
Para 6 ranas son necesarios 48 movimientos



Tras 5 movimientos llegamos a

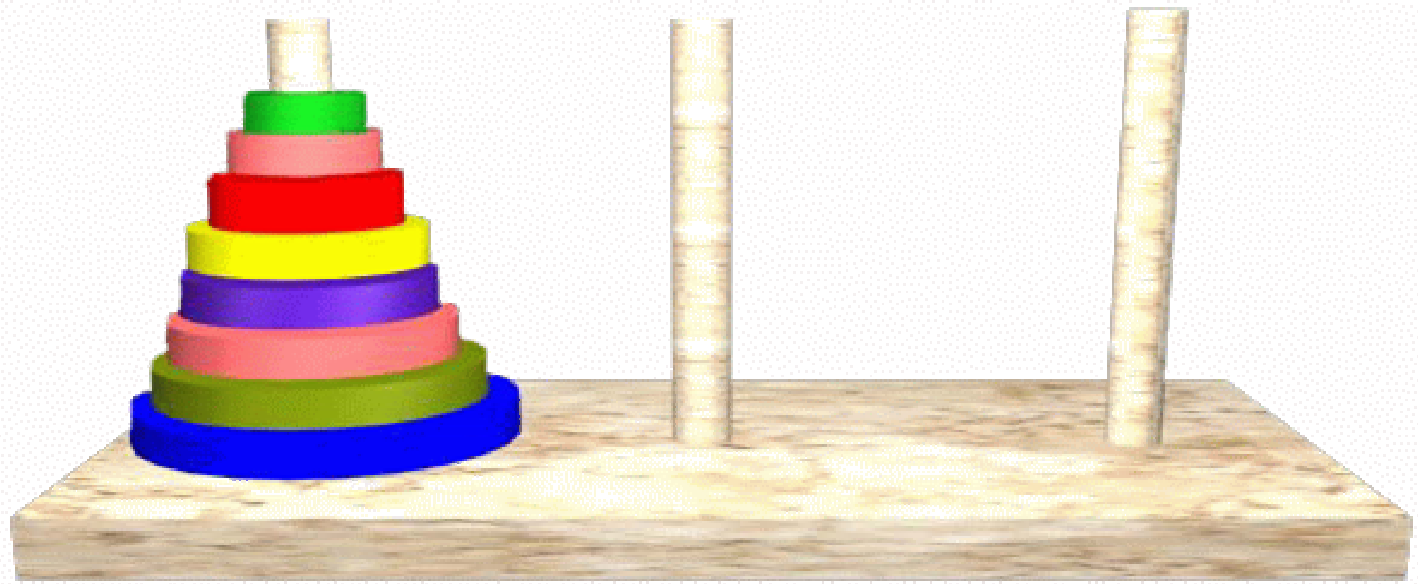


Tras 4 movimientos llegamos a



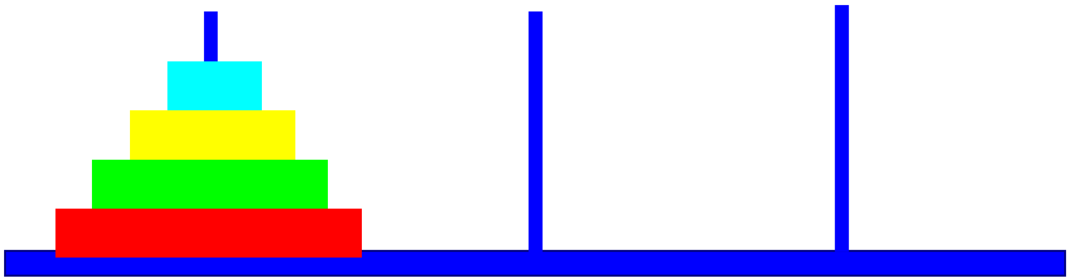
Así pues, para 4 ranas necesitamos hacer 5 + 4 = 9 movimientos más que para 3 ranas

Las torres de Hanoi



http://www.aulademate.com/contentid-99.html

Las torres de Hanoi



Objetivo: llevar los discos de la varilla izquierda a la varilla derecha.

Reglas del juego:

•No se puede desplazar más de un disco en cada movimiento.

•Un disco sólo se puede apoyar sobre otro de diámetro mayor.

¿Cuál es el mínimo número de movimientos para 4 discos?
¿Y para 64 discos?

Pautas numéricas

Piensa un número de dos cifras. Réstale la suma de sus cifras, ¿qué observas?

Piensa un numero de 2 cifras [Ejemplo: 54]
Réstale la suma de sus dos cifras [Ejemplo: 54 - (5 + 4) = 45]
Busca en la lista de abajo el símbolo que corresponde a dicho número...
Memoriza el símbolo ... Haz click sobre el cuadrado azul y tu pensamiento será leído...

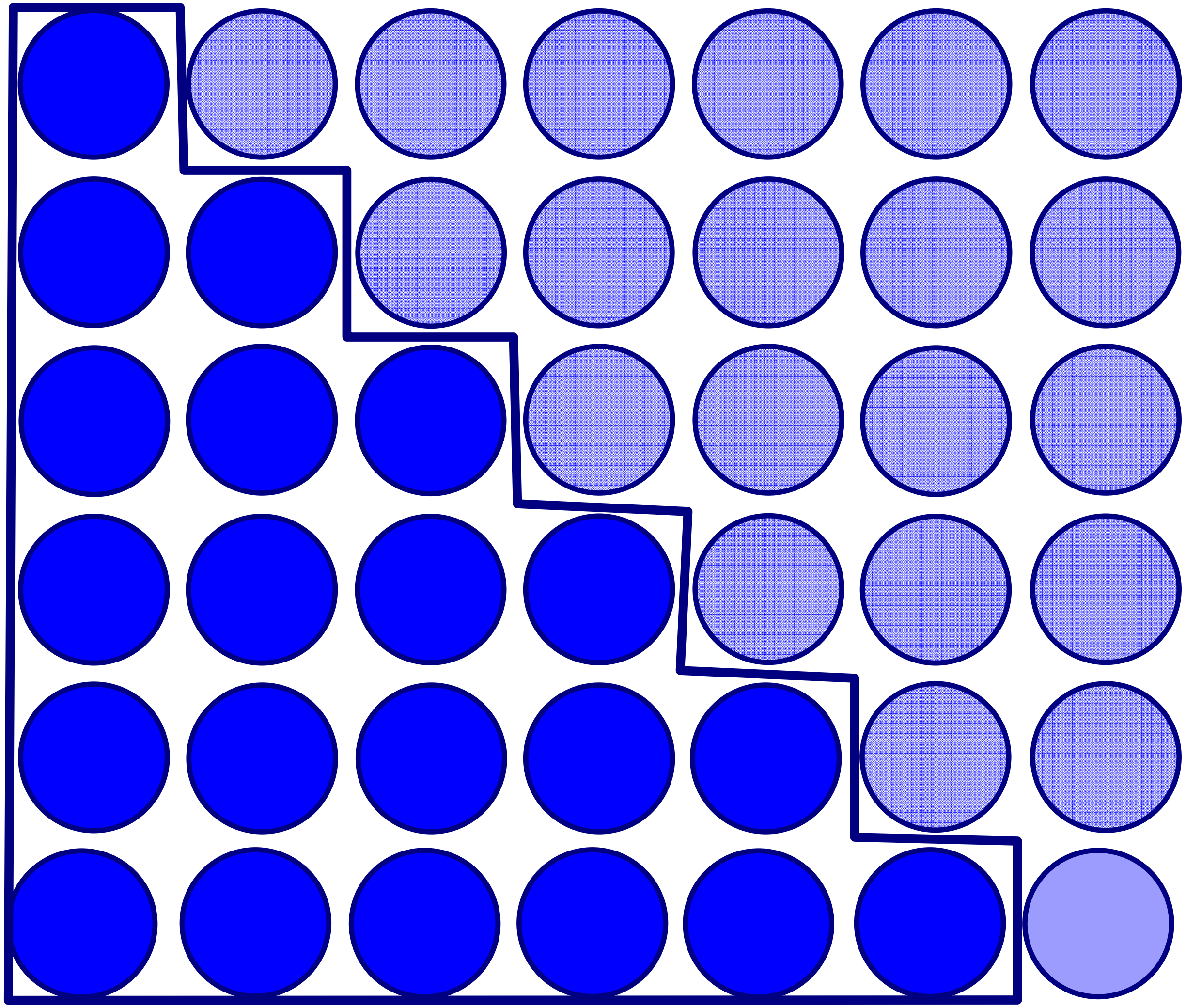
99	☼	98	☒	97	❖	96	☽	95	☠	94	♐	93	♌	92	☠	91	❄	90	□
89	♓	88	♈	87	♒	86	⚐	85	□	84	♒	83	●	82	✋	81	❄	80	⚐
79	♎	78	💧	77	☺	76	♎	75	☺	74	♓	73	💧	72	❄	71	⌛	70	◆
69	♒	68	☒	67	■	66	♒	65	♎	64	⚐	63	❄	62	♐	61	♌	60	♌
59	□	58	☽	57	♈	56	☺	55	☽	54	❄	53	♒	52	❖	51	□	50	■
49	💣	48	◆	47	■	46	■	45	❄	44	✋	43	♉	42	✞	41	■	40	♐
39	♉	38	❖	37	☒	36	❄	35	●	34	✞	33	⌘	32	💧	31	💣	30	♐
29	✞	28	●	27	❄	26	❄	25	●	24	☠	23	♎	22	□	21	♈	20	■
19	💣	18	❄	17	♎	16	❄	15	💧	14	♓	13	♐	12	♎	11	⌛	10	◆
9	❄	8	♐	7	♓	6	⌛	5	♐	4	●	3	✋	2	💣	1	□	0	❄

http://www.cyberpadres.com/juegos/jugar/pensamiento_lectura.htm

¿Cuánto suman los diez primeros números enteros?

¿Y los diez mil primeros números enteros?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 10\,000 =$$

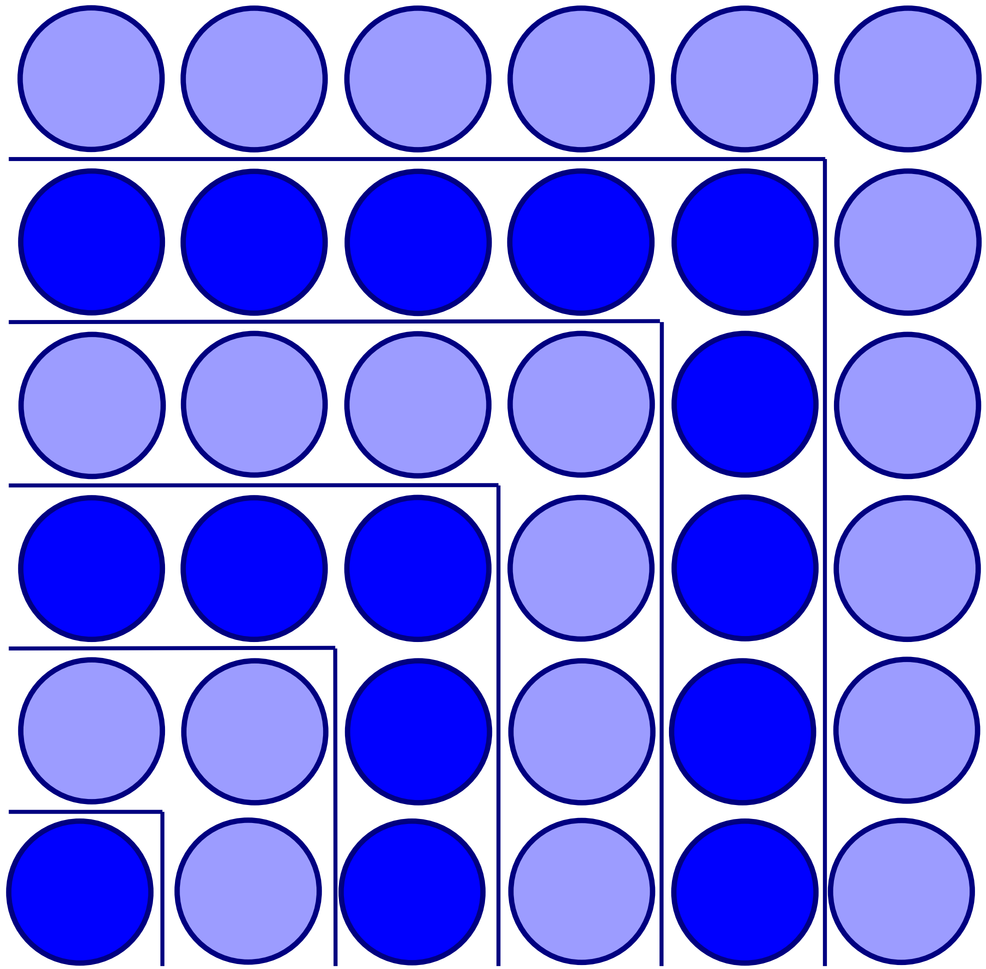


Demostraciones sin palabras

Las matemáticas en el aula y en
el mundo real

¿Cuánto suman los primeros veinte números enteros impares? ¿Y los cinco mil primeros?

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 9\,999 =$$



Demostraciones sin palabras

Las matemáticas en el aula y en
el mundo real

1. Escribe un número de 4 cifras no todas iguales.

2. Reordena las cifras para obtener el mayor y el menor número posible.

3. Calcula la diferencia entre estos dos números.

4. Repite el proceso unas cuantas veces con los números que vas obteniendo.

¿Qué observas?

El ingenio en las matemáticas

6174

El número 6174

$$a \geq b \geq c \geq d$$

$$\begin{array}{rl} & M = 1000\,a + 100\,b + 10\,c + d \\ - & N = 1000\,d + 100\,c + 10\,b + a \\ \hline \end{array}$$

$$M - N = 1000\,(a - d) + 100\,(b - c) + 10\,(c - b) + (d - a)$$

$$\boldsymbol{M - N = 999\,(a - d) + 90\,(b - c)}$$

Observa que, como $a \geq b \geq c \geq d$ y $a > d$,

$$0 < a - d \leq 9$$

$$0 \leq b - c \leq a - d$$

Si $a - d = 1$ entonces $b - c = 0$ ó 1 y

$M - N = 999\ (a - d) + 90\ (b - c) = 999$ ó 1089.

Si $a - d = 2$ entonces $b - c = 0, 1$ ó 2 y

$M - N = 999\ (a - d) + 90\ (b - c) = 1998, 2088$ ó 2179

Si $a - d = 3$ ...

En total debemos considerar

$$2 + 3 + \ldots + 10 = 54 \text{ casos}$$

0999	1089	1998	2088	2178	2997	3087	3177	3267
3996	4086	4176	4266	4356	4995	5085	5175	5265
5355	5445	5994	6084	6174	6264	6354	6444	6534
6993	7083	7173	7263	7353	7443	7533	7623	7992
8082	8172	8262	8352	8442	8532	8622	8712	8991
9081	9171	9261	9351	9441	9531	9621	9711	9801

0999	**1089**	**1998**	**2088**	**2178**	**2997**	**3087**	**3177**	**3267**
3996	**4086**	**4176**	**4266**	**4356**	**4995**	**5085**	**5175**	**5265**
5355	**5445**	**5994**	**6084**	**6174**	**6264**	**6354**	**6444**	**6534**
6993	**7083**	**7173**	**7263**	**7353**	**7443**	**7533**	**7623**	**7992**
8082	**8172**	**8262**	**8352**	**8442**	**8532**	**8622**	**8712**	**8991**
9081	**9171**	**9261**	**9351**	**9441**	**9531**	**9621**	**9711**	**9801**

En cada uno de estos 30 casos se alcanza el 6174 en menos de 7 pasos.

Conjeturas, teoremas y contraejemplos

Observa que:

$2^2 - 1$ es divisible por 3

$2^4 - 1$ es divisible por 5

$2^6 - 1$ es divisible por 7

¿Qué puedes decir de $2^n - 1$?

Excursions in calculus

Es claro que si n es impar $n + 1$ no divide a $2^n - 1$.

Probando para los primeros números pares observamos que:

$$2^n - 1 \text{ es divisible por } n + 1$$

para

$$n + 1 = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$$

y

$$2^n - 1 \text{ no es divisible por } n + 1$$

para

$$n + 1 = 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39$$

Conjetura 1:

Si $n+1$ es un número primo entonces $2^n - 1$ es divisible por $n+1$.

Conjetura 2:

Si $n+1$ no es un número primo entonces $2^n - 1$ no es divisible por $n+1$.

El pequeño teorema de Fermat:

Si a es un número natural y p un primo que no divide a a, entonces $a^{p-1} - 1$ es múltiplo de p.

$a, 2a, 3a, \ldots (p\text{-}1)a \qquad ka = pc_k + r_k \quad r_k \neq r_j \text{ si } k \neq j$

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \ldots \cdot (p\text{-}1)a = p\,C + r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots r_k$$

$$(p\text{-}1)!\, a^{p-1} = p\,C + (p\text{-}1)! \Rightarrow p \text{ divide a } (p\text{-}1)!\,(a^{p-1} - 1)$$

$$\Rightarrow p \text{ divide a } (a^{p-1} - 1)$$

Conjetura 2:

Si $n + 1$ no es un número primo entonces

$2^n - 1$ no es divisible por $n + 1$.

Leibniz (1646-1716)

Sarrus (1798-1861)

¡¡$2^{340} – 1$ es divisible por 341= 11 x 31!!

$$2^{340} - 1 = (2^5)^{68} - 1 = x^{68} - 1 =$$

$$=(x - 1)\,(x + 1)(x^{66} + \ldots\ldots + 1)=$$

$$= 31 \cdot 33 \cdot (x^{66} + \ldots + 1) = 341 \cdot 3 \cdot k$$

Tres conjeturas famosas

Conjetura de Goldbach (1742)

Todo número par mayor que 2 se puede escribir como suma de dos números primos.

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$10 = 3 + 7$$

$$12 = 5 + 7$$

$$2008 = 911 + 1097$$

El problema $3x + 1$

Comienza con un número natural cualquiera.

Si es par, divídelo entre 2.

Si es impar, multiplícalo por 3 y súmale 1.

Repite el proceso.

Conjetura: Todo número natural produce una secuencia que finalmente acaba en 4, 2, 1.

17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Conjetura de los capicúas

Piensa un número entero.

Invierte sus cifras.

Suma los dos números.

Repite la operación con el resultado obtenido.

Conjetura: Tarde o temprano obtendrás un número capicúa.

235 + 532 = 767

139 + 931= 1070;   1070 + 0701= 1771

Bibliografía:

Dirichlet Student Notes y **Newton Students Notes**
Mathematics Challenge for Young Australians
Enrichment Stage
AMT Publishing
http://www.amtt.com.au/

Demostraciones sin palabras
Roger B. Nelsen
Ed. Proyecto Sur
ISBN 84 8254 160 9

El ingenio en las matemáticas
Ross Honsberger
La tortuga de Aquiles
ISBN 85731 14 X

Excursions in Calculus
Robert M. Young
The Mathematical Association of America
ISBN 0 88385 317 5

Huevos, nudos y otras mistificaciones matemáticas
Martin Gardner
Gedisa Editorial
ISBN 84 7432 933 7

Damas, parábolas y más mistificaciones matemáticas
Martin Gardner
Gedisa Editorial
ISBN 84 7432 934 5

Mathematical Circles (Russian Experience)
Fomin, Genkin e Itenberg
American Mathematical Society
ISBN 0 8218 0430 8

Problemas con pautas y números
Shell Centre for Mathematical Education
Ed. Universidad del País Vasco
ISBN 788475854458

Las ranas saltarinas
http://www.albinoblacksheep.com/flash/frog

Las torres de Hanoi
http://www.aulademate.com/contentid-99.html

Lectura del pensamiento
http://www.cyberpadres.com/juegos/jugar/pensamiento_lectura.htm