Algunas aplicaciones del Cálculo Computacional a la enseñanza de las Matemáticas

ROBERTO RODRÍGUEZ DEL RÍO
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID
rrdelrio@eucmax.sim.ucm.es

Cursos de Verano
San Lorenzo de El Escorial, julio de 2000

MatLab

- Desarrollado a finales de los setenta (Universidades de New Mexico y Stanford)

- En la actualidad, ampliamente difundido en la Universidad y en la Industria

Generalidades

• Núcleo básico del programa: Cálculo Numérico basado en Matrices

(**MatLab**=**Mat**rix **Lab**oratory)

• Módulos adicionales: *Toolboxes (MatLab Symbolic Toolbox, núcleo del programa Maple)*

• Herramientas interactivas

Ventajas

Potencia de Cálculo

Lenguaje de Programación Sencillo

Enorme potencia gráfica

Inconvenientes

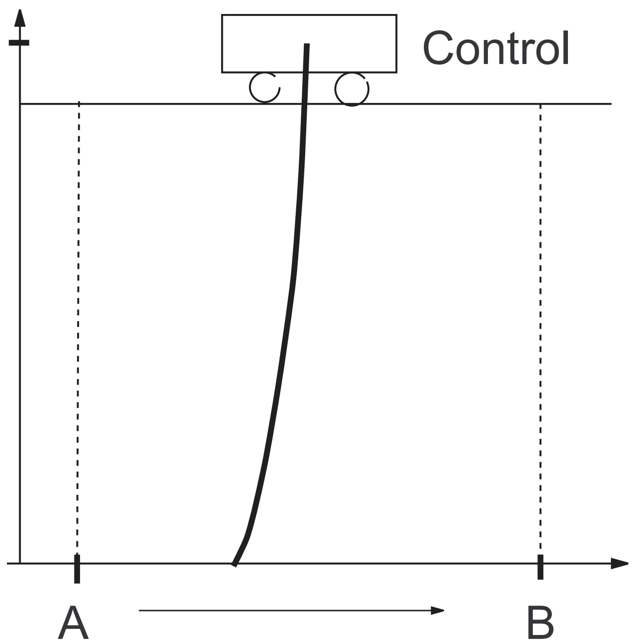
Mayor complejidad que la mayoría de los asistentes

UN EJEMPLO: LA CADENA PESADA

Tería de Control:

Teoría matemática en la cual se estudian los procesos de formalización y los métodos de elección del modo (óptimo, en cierto sentido definido de antemano) para ejecutar un proceso dinámico sujeto a control.

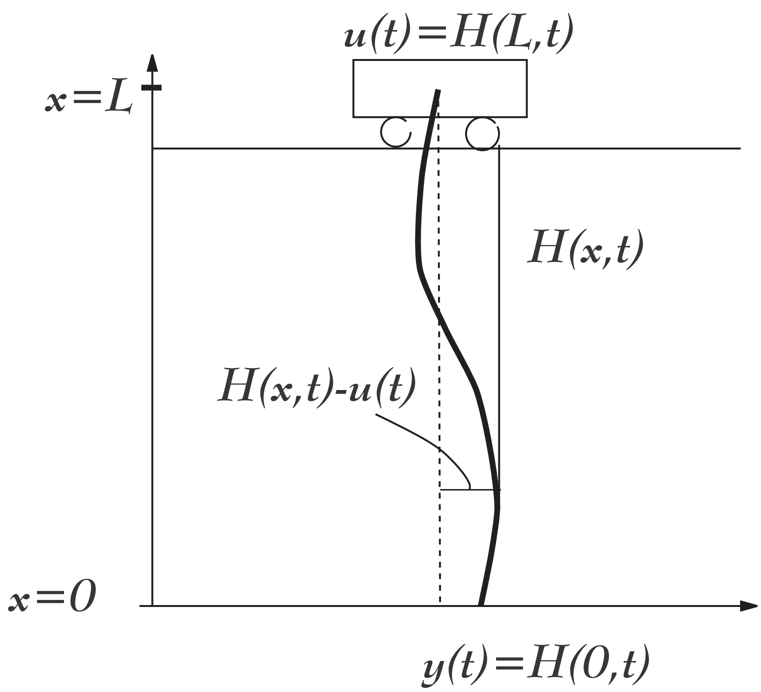
El modelo



Problema: ¿Cómo mover el *Control* para llevar la cadena de A a B?

- Caso discreto, péndulos “encadenados” (solución complicada)

- Caso continuo: (Daniel Bernoulli 1738)



$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(gx\dfrac{\partial H}{\partial x}\right) & \text{si } 0 < x < L;\ t > 0 \\ H(L,t) = u(t) \end{cases}$$

x: altura

g: gravedad

L: altura del carrito≈longitud de la cadena (desplazamientos pequeños)

$u(t) = H(L,t)$: *Control*

La solución

(N. Petit & P. Rouchon, 1999)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(gx\dfrac{\partial H}{\partial x}\right) & \text{si } 0 < x < L;\ t > 0 \\ H(L,t) = u(t) \end{cases}$$

Condiciones Iniciales $\begin{cases} H(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$

ENTONCES,

$$H(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left[y(t + 2\sqrt{x/g}\,\mathrm{sen}\,\theta) + y(t - 2\sqrt{x/g}\,\mathrm{sen}\,\theta) \right] d\theta$$

donde $y(t) = H(0,t)$, extremo de la cadena

ADEMÁS, el *CONTROL* se puede calcular:

$$u(t) = H(L,t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[y(t + 2\sqrt{\frac{L}{g}}\,\mathrm{sen}\,\theta) + y(t - 2\sqrt{\frac{L}{g}}\,\mathrm{sen}\,\theta) \right] d\theta$$

Simulación con MatLab

Dada $y(t)$, por ejemplo,

$$y(t) = \begin{cases} 0 & ;\ \text{si } t < 0 \\ 1{,}5L(\frac{t}{T})^2(3-2(\frac{t}{T})) & ;\ \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 1{,}5L & ;\ \text{si } t > T \end{cases}$$

con $L = 1{,}5$ y $T = 4\sqrt{L/g}$

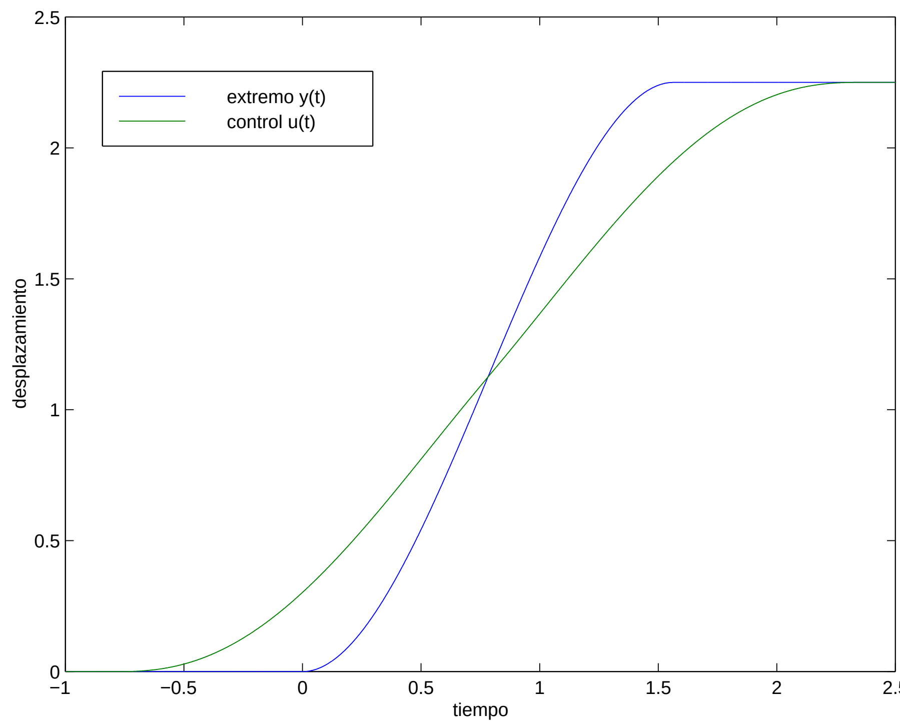
La guardamos en un fichero `extremo.m`

Para dibujarla:

```
>>t=-1:0.001:2.5;
>>y=extremo(t);
>>plot(t,y)
```

Para dibujar $y(t)$ y $u(t)$:

```
>>t=-1:0.001:2.5;
>>u=control(t);
>>plot(t,y,t,u)
```



Programas: `>>cadena`

`>>cadena2`

HERRAMIENTAS INTERACTIVAS

Sumas de Riemann

Ejemplo, $f(x) = 10xe^{-5x^2}$. Aproximar su integral en $[0, 1]$

- Introducimos la función,

```
>>f='10*x*exp(-5*x^2)'
f =
    10*x*exp(-5*x^2)
```

- Activamos las *Sumas de Riemann*,

```
>>rsums(f)
```

`rsums` sólo funciona para el intervalo $[0, 1]$.

Para calcular una integral en el intervalo $[a, b]$

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

usamos el cambio $y = \dfrac{x-a}{b-a}$

$$I = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)y)dy$$

Calculadora de Funciones

```
>>funtool
```

“Con frecuencia, hay quienes se ponen a escrutar algunas proposiciones con tanta prisa, que aplican a su solución un espíritu que va errante al azar, antes de caer en la cuenta de por qué signos reconocerán el objeto buscado, si llega a presentárseles...”

Descartes. *Reglas para la dirección de la mente*