

Sistemas de ecuaciones diferenciales: aplicaciones y visualización

Roberto Rodríguez del Río
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
rr_delrio@mat.ucm.es
<http://www.mat.ucm.es/~rrdelrio>

San Lorenzo de El Escorial, julio de 2004

• SISTEMAS LINEALES

Romeo y Julieta

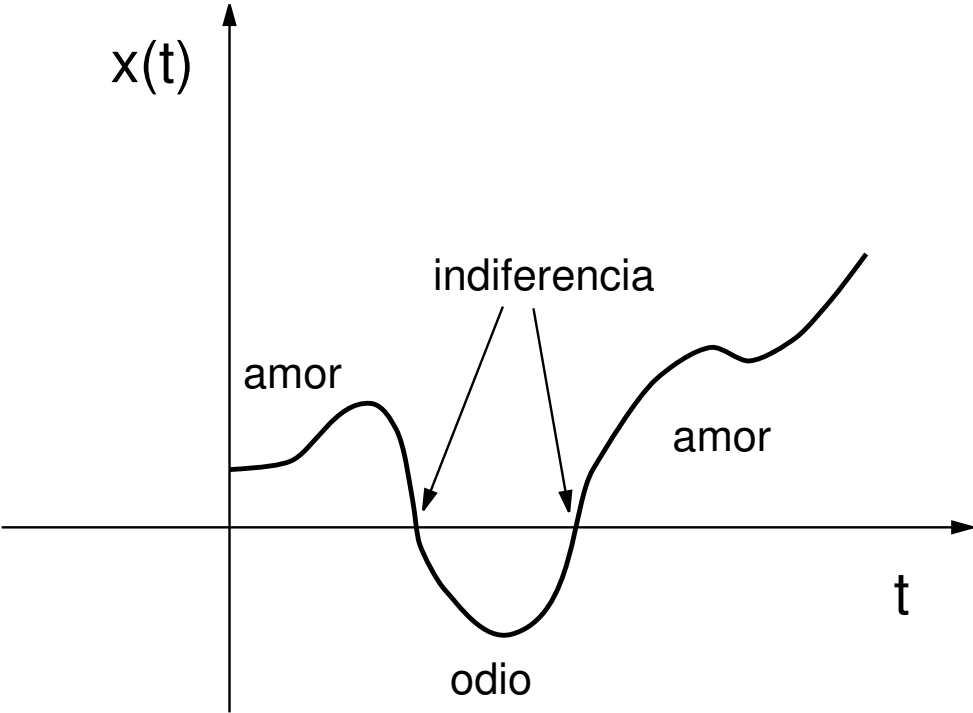
(Strogatz, 1988)

$x(t)$ = “amor de Romeo a Julieta en t ”

$y(t)$ = “amor de Julieta a Romeo en t ”

(en las “unidades adecuadas”)

Un ejemplo de una posible función $x(t)$:



Una historia diferente:

$$\begin{cases} x'(t) = -a \cdot y(t) \\ y'(t) = b \cdot x(t) \end{cases} \quad a, b > 0$$

Dadas unas condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 \quad y(0) = y_0,$$

¿cómo son las soluciones del sistema?

Eliminando $y(t)$ en el sistema, obtenemos

$$x''(t) + ab \cdot x(t) = 0$$

y, haciendo $\omega^2 = ab$, la ecuación queda

$$x''(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0$$

(Ecuación del Oscilador Armónico)

Lo mismo ocurre con $y(t)$.

Visualización de las soluciones:

Las soluciones del sistema son de la forma

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\text{curva en paramétricas})$$

Para dibujar las soluciones:

- En MATLAB: usando el comando `pplane5`
- En internet: <http://www.mat.ucm.es/~rrdelrio>
(En Recursos de Matemáticas)

Otras situaciones:

- *La historia clásica*

$$\begin{cases} x'(t) = a \cdot y(t) \\ y'(t) = b \cdot x(t) \end{cases}$$

- *¡Cuanto más te quiero, más te amo!*

$$\begin{cases} x'(t) = a \cdot x(t) \\ y'(t) = b \cdot y(t) \end{cases}$$

- *El amor es ciego*

$$\begin{cases} x'(t) = a \cdot y(t) \\ y'(t) = -b \cdot x(t) + c \cdot y(t) \end{cases}$$

- *Amantes precavidos*

$$\begin{cases} x'(t) = -a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \\ y'(t) = b \cdot x(t) - a \cdot y(t) \end{cases}$$

- *Romeo el robot*

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \end{cases}$$

Algunas referencias:

- D. Arnold, J. C. Polking. *Ordinary Differential Equations using MATLAB*, Prentice Hall, Upper Saddle River NJ, 1999.
- S. H. Strogatz. *Love affairs and differential equations*, Math. Magazine, 61 (1988), p. 35.
- S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Westview Press, Cambridge MA, 2000.
- S. Rinaldi. *Laura and Petrarch: An intriguing case of cyclical love dynamics*, Siam J. Appl. Math., 58, 4, (1998), pp. 1205-1221.

• SISTEMAS NO LINEALES

Modelos de difusión de epidemias. **Modelo SIR**
(Kermack, McKendrick, 1927)

$x(t)$ = “número de individuos **S**usceptibles de enfermar”

$y(t)$ = “número de individuos **I**nfectados”

$z(t)$ = “número de individuos **R**ecuperados”

Hipótesis:

- La población es constante:

$$x(t) + y(t) + z(t) = N$$

- Durante el período de estudio no se producen nacimientos, muertes, inmigración ni emigración.
- Los individuos recuperados no vuelven a enfermar.

Modelo SIR

$$\begin{cases} x'(t) = -a \cdot x(t) \cdot y(t) \\ y'(t) = a \cdot x(t) \cdot y(t) - b \cdot y(t) \\ z'(t) = b \cdot y(t) \end{cases}$$

que equivale al sistema

$$\begin{cases} x'(t) = -a \cdot x(t) \cdot y(t) \\ y'(t) = a \cdot x(t) \cdot y(t) - b \cdot y(t) \\ z(t) = N - x(t) - y(t) \end{cases}$$

Ejercicios:

- Dibujar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x' = -a \cdot x \cdot y \\ y' = a \cdot x \cdot y - b \cdot y \end{cases}$$

- ¿Cómo evolucionan las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$?

Algunas referencias:

- J. Callahan y otros. *Calculus in Context*, W. H. Freeman & Co., New York, 1995.
- W. O. Kermack, A. G. McKendrick. *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*, Proc. Roy. Soc. Lond. A, 117 (1927), pp. 700-721.
- J. Medlock. *Mathematical Modeling of Epidemics*,
www.amath.washington.edu/~medlock/other/epidemiology_intro_talk.pdf
- J. D. Murray. *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, New York, 1989.