El número π: de la Geometría al Cálculo Numérico

UIMP, septiembre de 2006

Roberto Rodríguez del Río

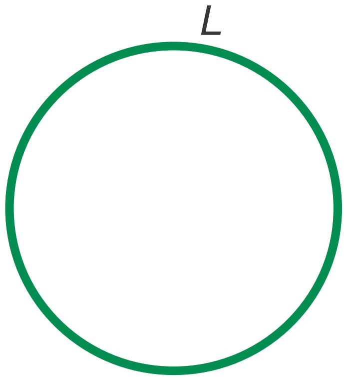
http://www.mat.ucm.es/∼rrdelrio/

Departamento de Matemática Aplicada

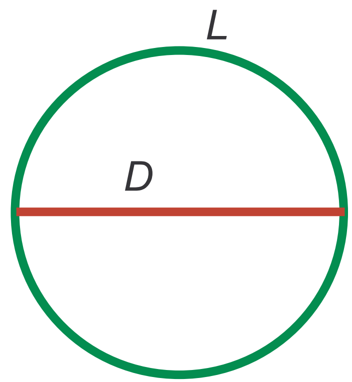
Universidad Complutense de Madrid

IES Valdemorillo (Madrid)

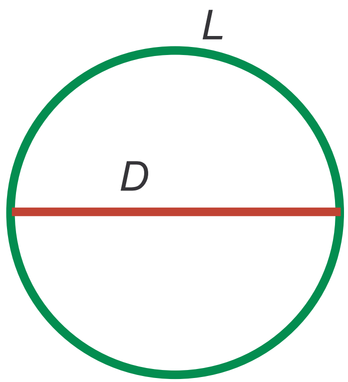
π



π

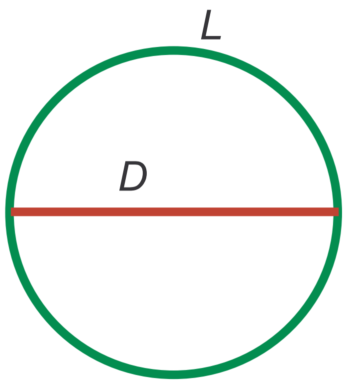


π



$$\frac{L}{D} = \pi$$

π



$$\frac{L}{D} = \pi$$

$\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\iota\alpha$

Oughtred (1514-1660)

Euler (1707-1783)

El número π...

- Cuadratura del círculo

El número π...

- Cuadratura del círculo
- Arquímedes y sus círculos

El número π...

- Cuadratura del círculo
- Arquímedes y sus círculos
- El Cálculo: Leibniz, Euler

El número π...

- Cuadratura del círculo
- Arquímedes y sus círculos
- El Cálculo: Leibniz, Euler
- La aparición del ordenador. Ramanujan

El número π...

- Cuadratura del círculo
- Arquímedes y sus círculos
- El Cálculo: Leibniz, Euler
- La aparición del ordenador. Ramanujan
- La aguja de Buffon y otros juegos de azar

El número π...

- Cuadratura del círculo
- Arquímedes y sus círculos
- El Cálculo: Leibniz, Euler
- La aparición del ordenador. Ramanujan
- La aguja de Buffon y otros juegos de azar
- Cronología computacional de π

El número π...

- Cuadratura del círculo
- Arquímedes y sus círculos
- El Cálculo: Leibniz, Euler
- La aparición del ordenador. Ramanujan
- La aguja de Buffon y otros juegos de azar
- Cronología computacional de π
- Qué sabemos y qué no sabemos

El número π...

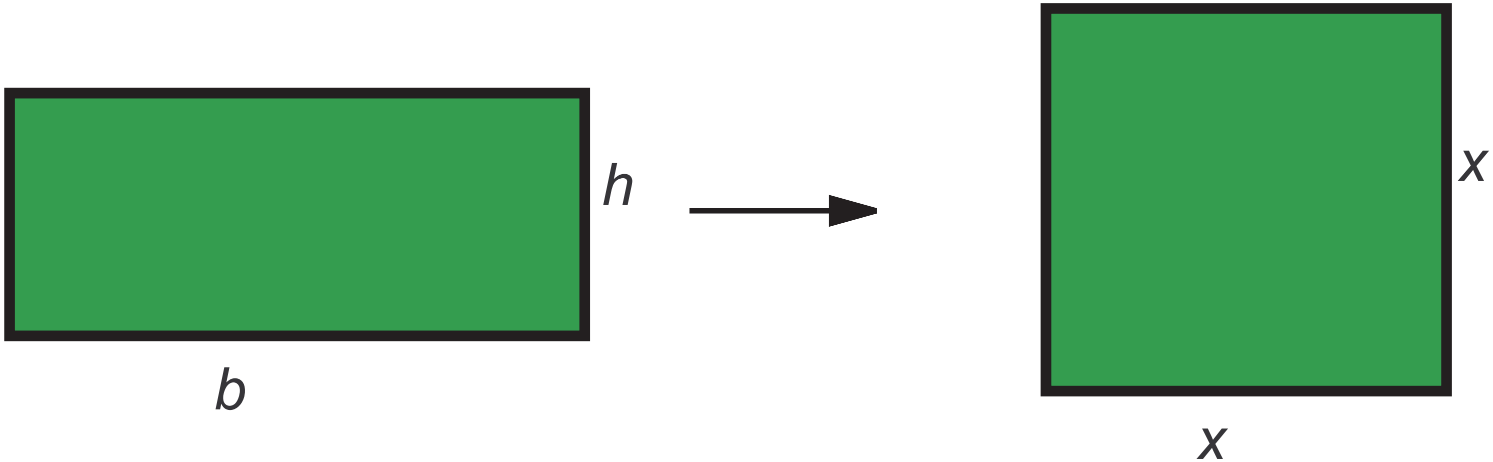
- Cuadratura del círculo
- Arquímedes y sus círculos
- El Cálculo: Leibniz, Euler
- La aparición del ordenador. Ramanujan
- La aguja de Buffon y otros juegos de azar
- Cronología computacional de π
- Qué sabemos y qué no sabemos
- Algunos libros

El número π...

- Cuadratura del círculo
- Arquímedes y sus círculos
- El Cálculo: Leibniz, Euler
- La aparición del ordenador. Ramanujan
- La aguja de Buffon y otros juegos de azar
- Cronología computacional de π
- Qué sabemos y qué no sabemos
- Algunos libros
- Conclusión

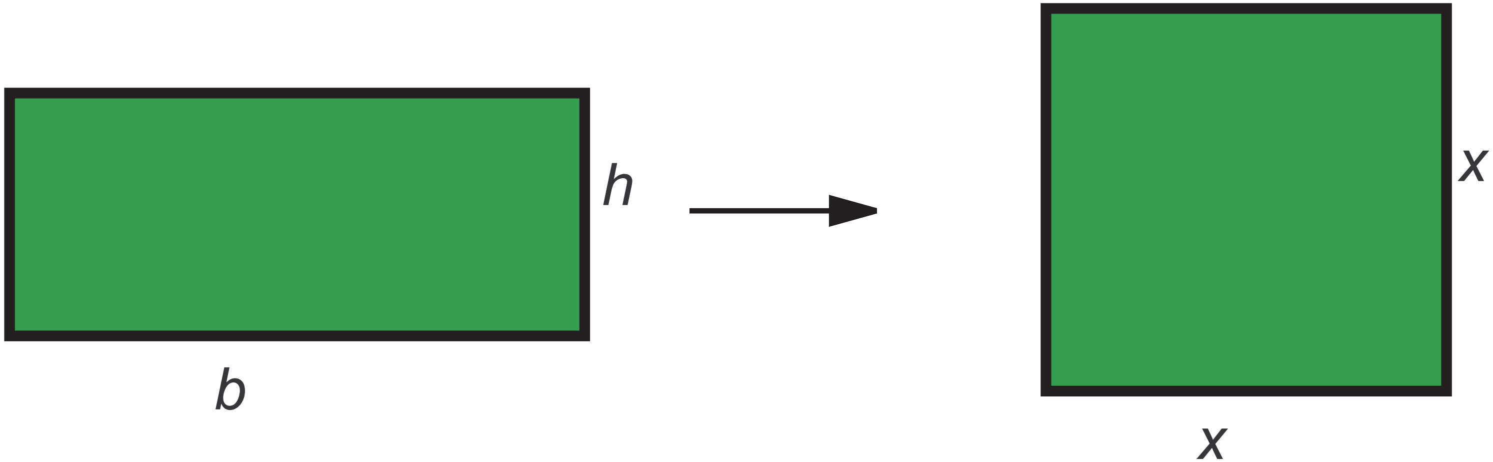
La cuadratura del círculo

Primero un rectángulo



La cuadratura del círculo

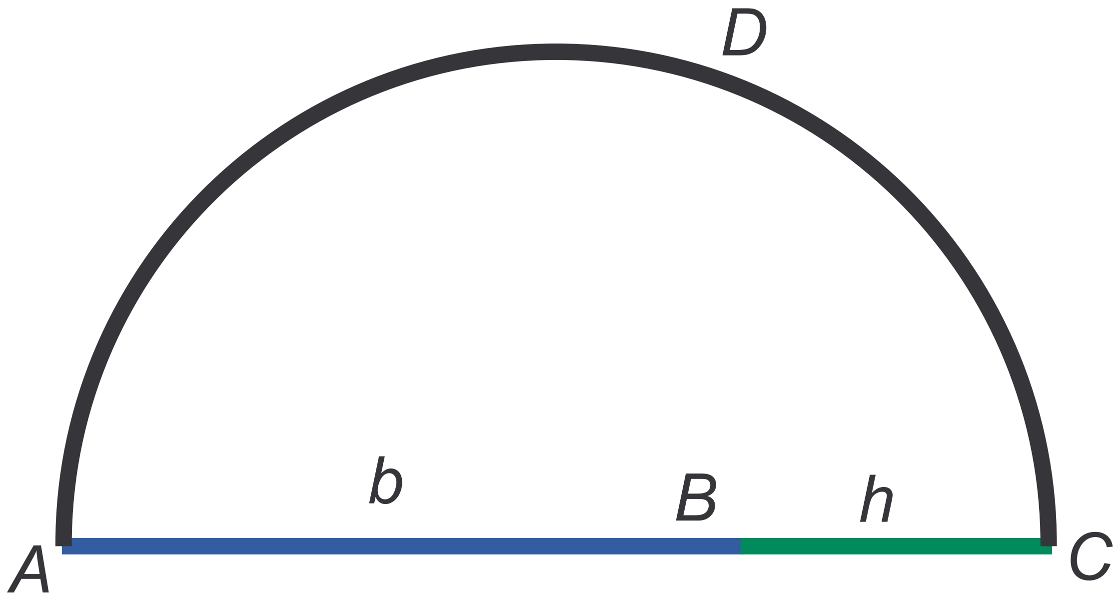
Primero un rectángulo



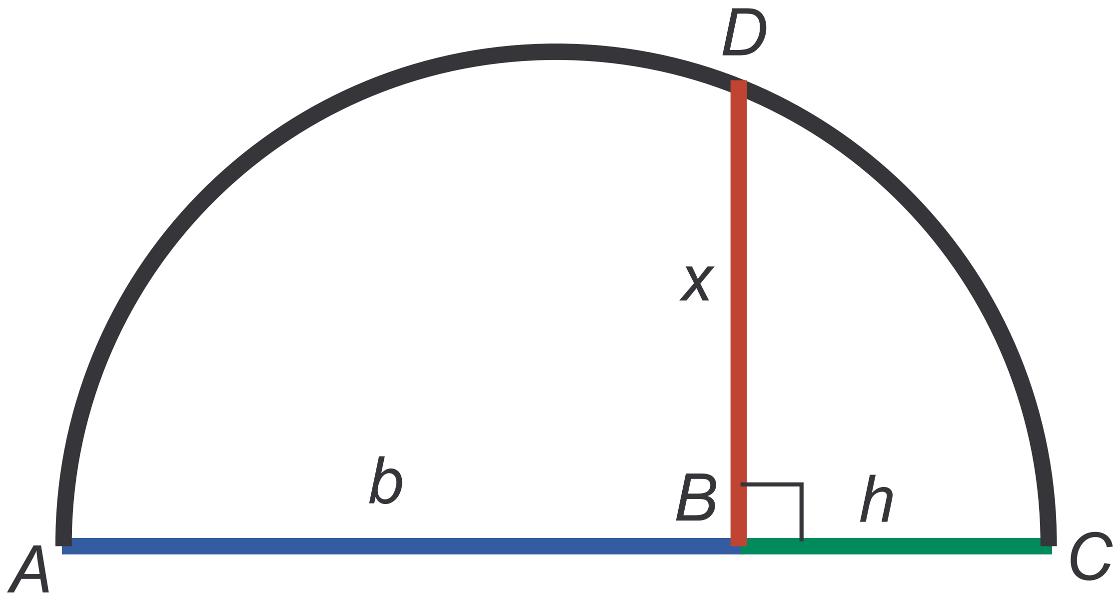
¿x? tal que

$$x^2 = b{\cdot}h$$

La cuadratura del círculo



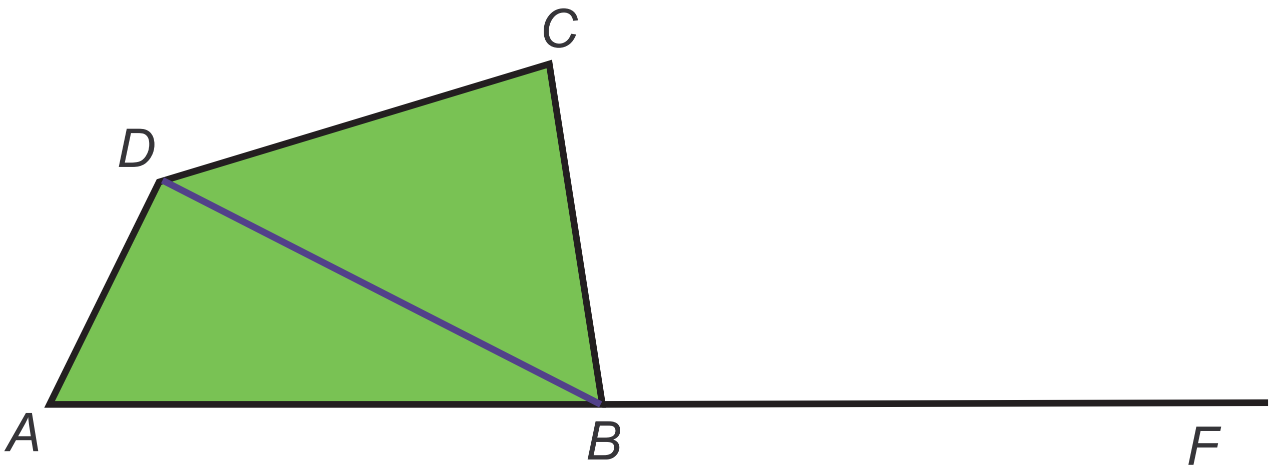
La cuadratura del círculo



$$x^2 = b{\cdot}h$$

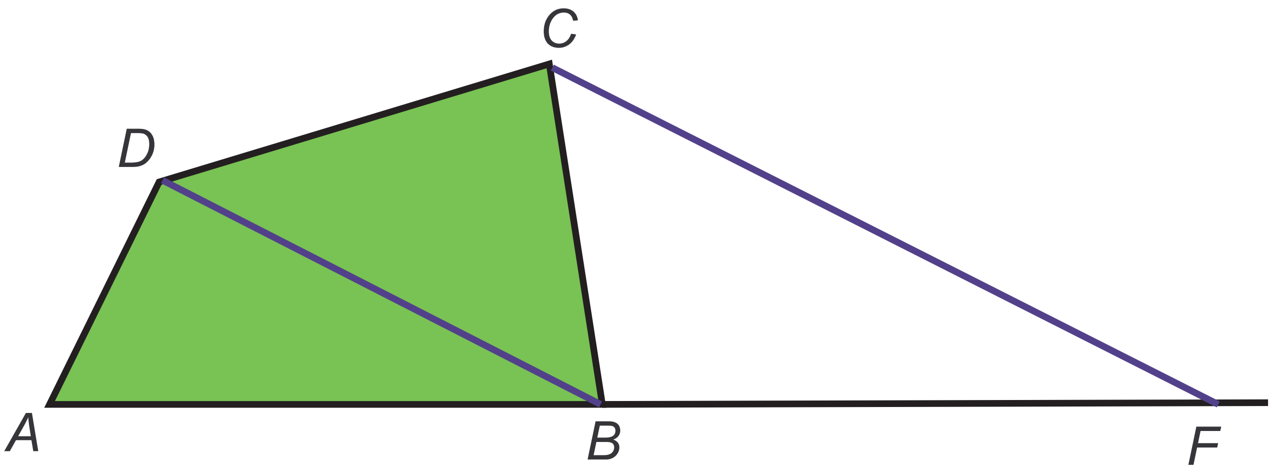
La cuadratura del círculo

Ahora un cuadrilátero



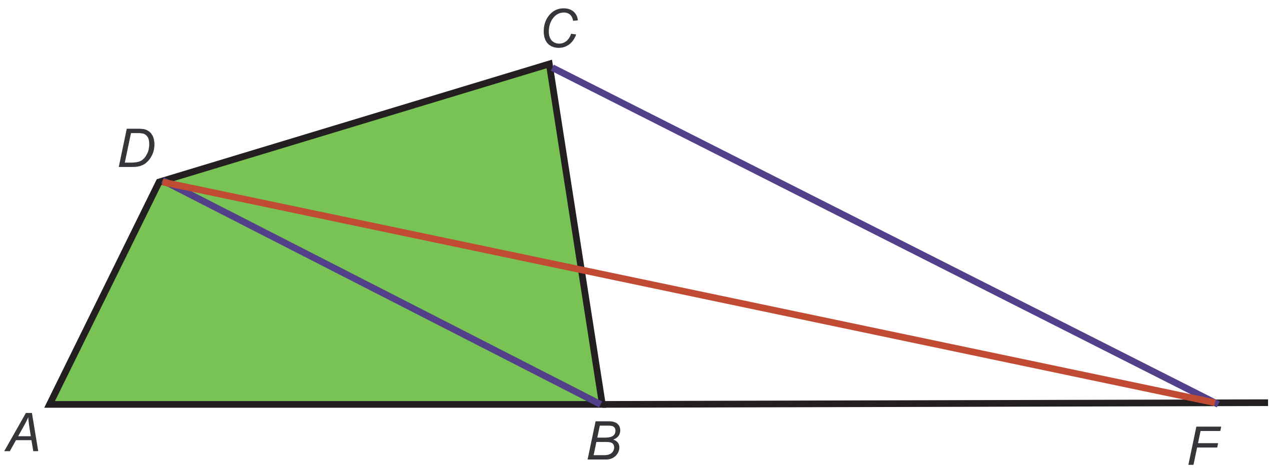
La cuadratura del círculo

Ahora un cuadrilátero



La cuadratura del círculo

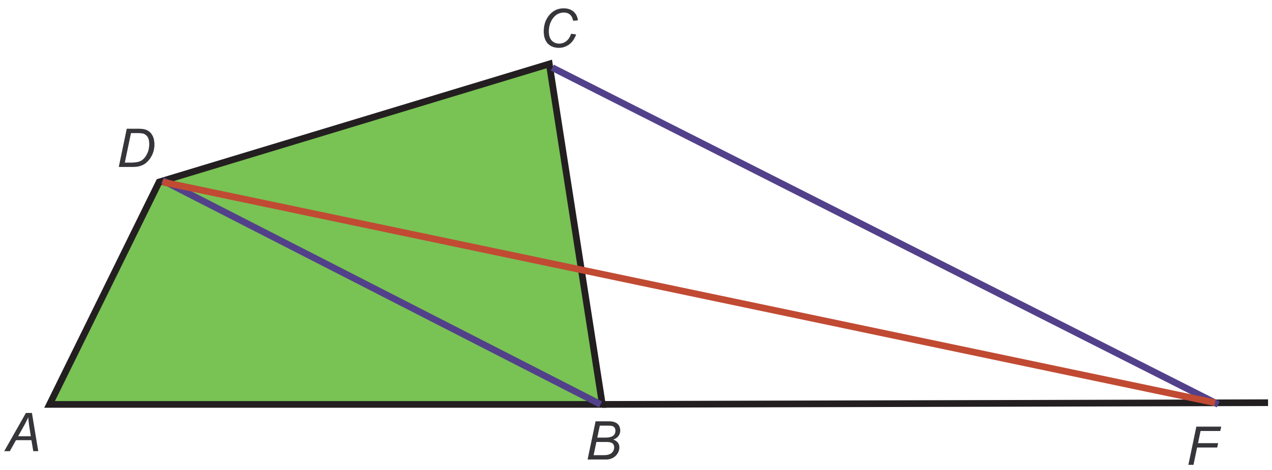
Ahora un cuadrilátero



$$\text{área}(AFD) = \text{área}(ABCD)$$

La cuadratura del círculo

Ahora un cuadrilátero

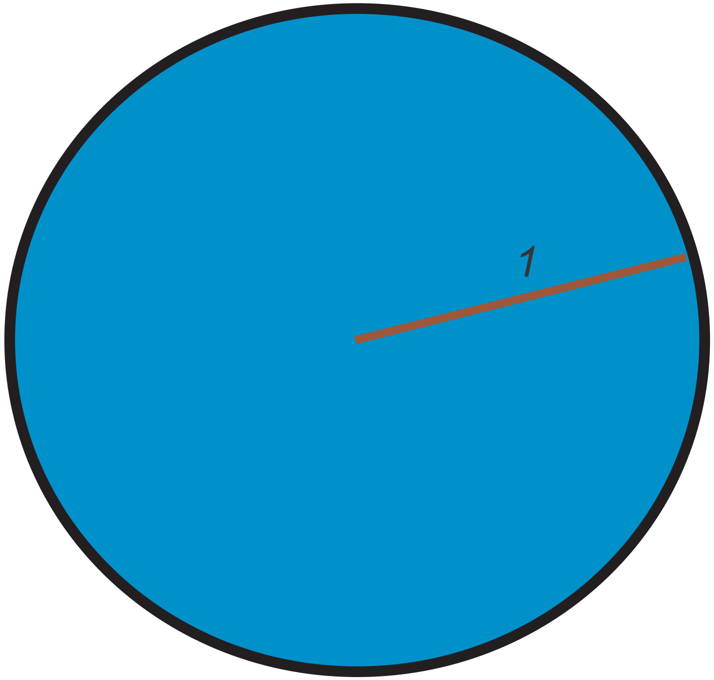


$$\text{área}(AFD) = \text{área}(ABCD)$$

y usamos la ecuación $x^2 = \dfrac{1}{2} b \cdot h$

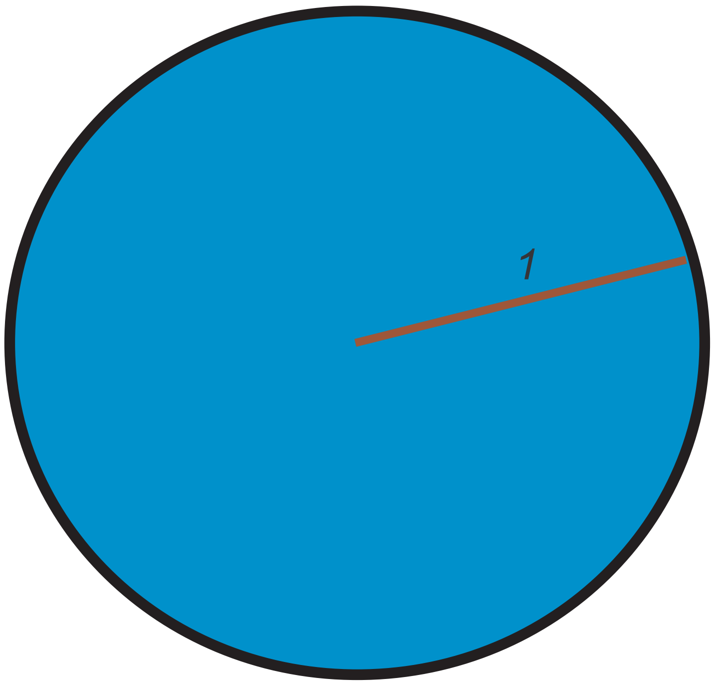
La cuadratura del círculo

Y ahora el círculo



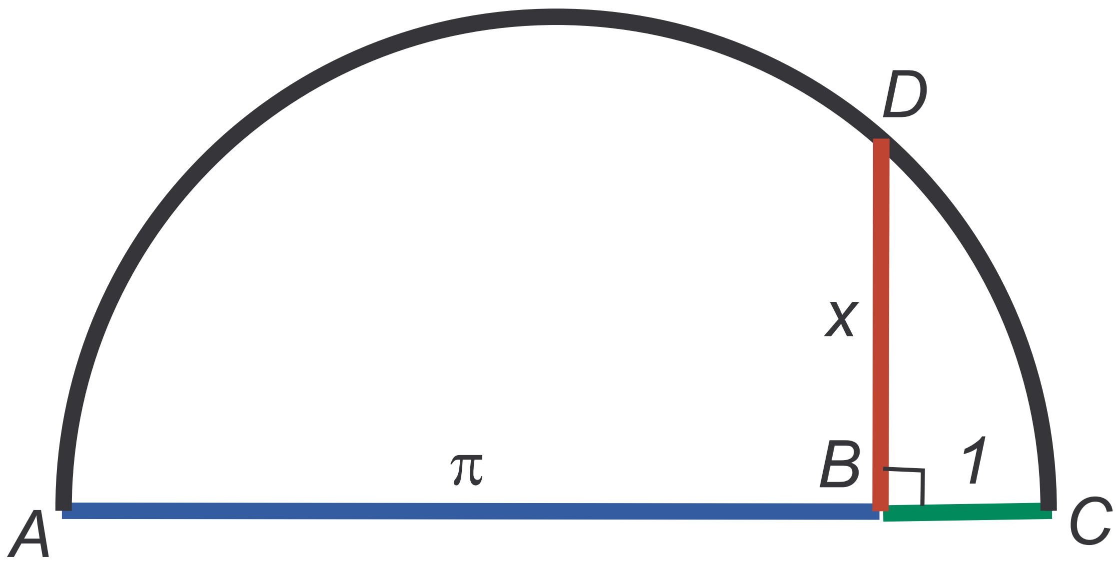
La cuadratura del círculo

Y ahora el círculo



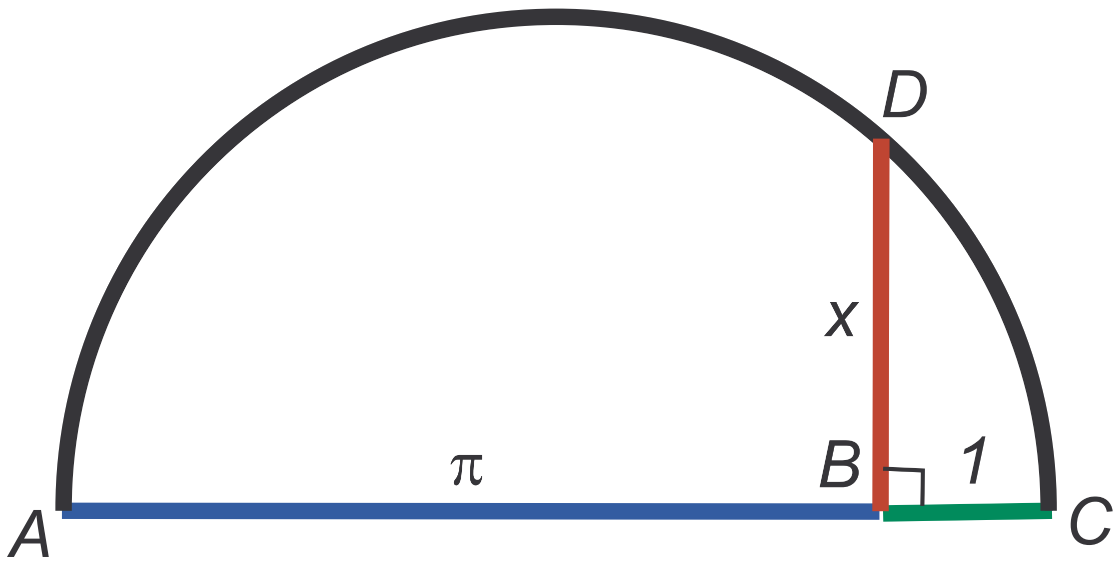
¿x? tal que $x^2 = \pi$

La cuadratura del círculo



$$x^2 = \pi \cdot 1$$

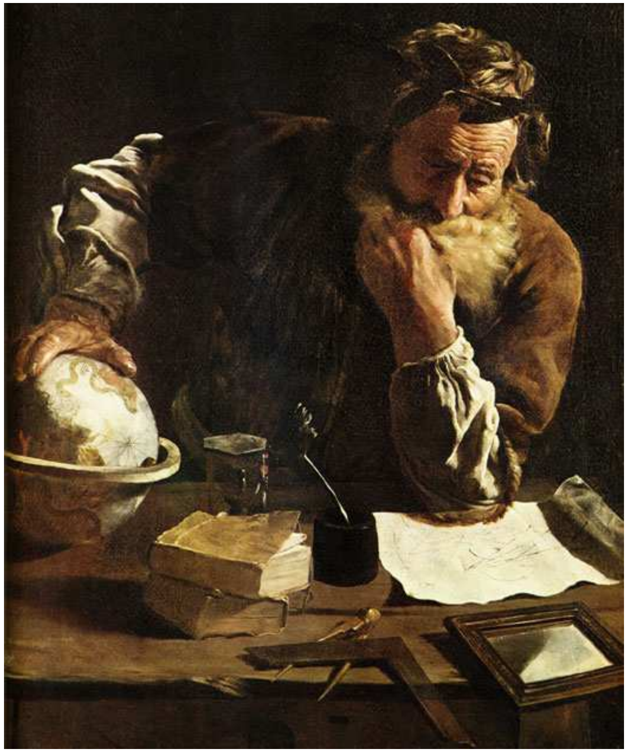
La cuadratura del círculo



$$x^2 = \pi \cdot 1$$

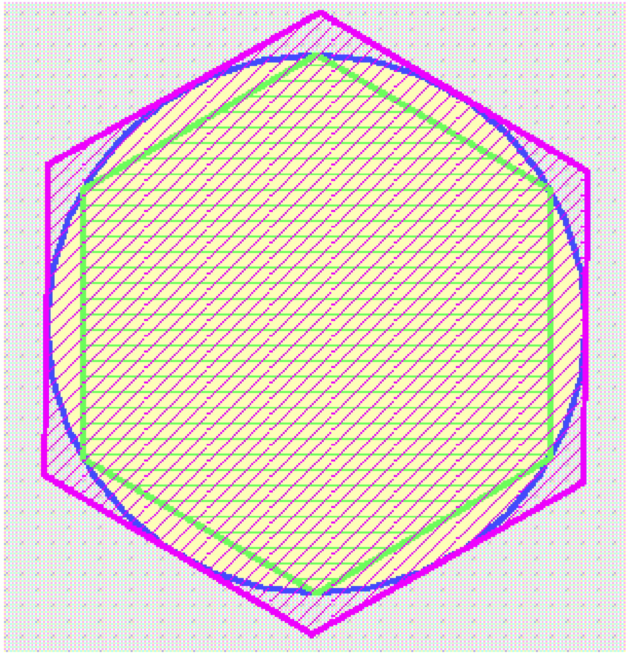
¿Cómo calcular π?

Arquímedes y sus círculos



Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) pintado por Domenico Fetti (1620)

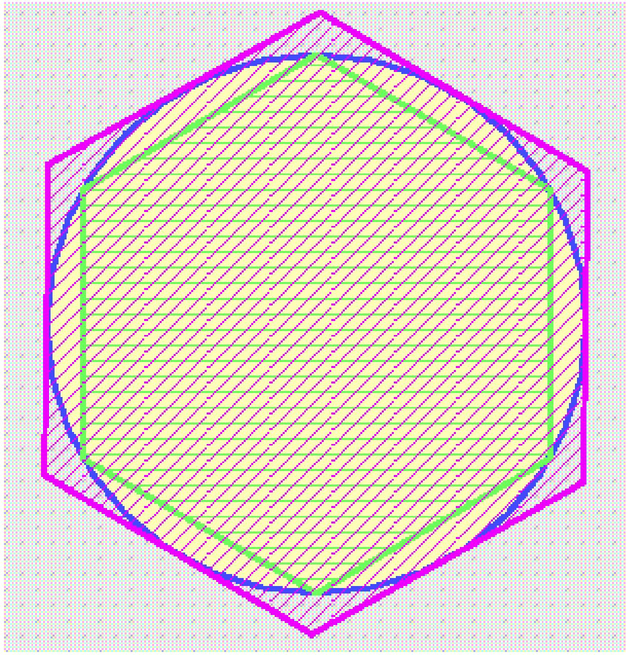
Arquímedes. “Medida del círculo”



Perímetros:

$$6r < 2\pi r < 4\sqrt{3}r$$

Arquímedes. “Medida del círculo”



Perímetros:

$$6r < 2\pi r < 4\sqrt{3}r$$

dividimos por $2r$:

$$3 < \pi < 2\sqrt{3} = 3'4641$$

Arquímedes: “Medida del círculo”

- Arquímedes hace el mismo cálculo para 12, 24, 48 y 96 lados

Arquímedes: "Medida del círculo"

- Arquímedes hace el mismo cálculo para 12, 24, 48 y 96 lados
- Para 96 lados: $\dfrac{223}{71} < \pi < \dfrac{22}{7}$

Arquímedes: “Medida del círculo”

- Arquímedes hace el mismo cálculo para 12, 24, 48 y 96 lados
- Para 96 lados: $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$
- $3'1408 < \pi < 3'1428$

Arquímedes: “Medida del círculo”

- Arquímedes hace el mismo cálculo para 12, 24, 48 y 96 lados
- Para 96 lados: $\dfrac{223}{71} < \pi < \dfrac{22}{7}$
- $3'1408 < \pi < 3'1428$
- Cálculos similares (polígonos inscritos y circunscritos) hasta el siglo XVII

Arquímedes: “Medida del círculo”

- Arquímedes hace el mismo cálculo para 12, 24, 48 y 96 lados
- Para 96 lados: $\dfrac{223}{71} < \pi < \dfrac{22}{7}$
- $3'1408 < \pi < 3'1428$
- Cálculos similares (polígonos inscritos y circunscritos) hasta el siglo XVII
- Por ejemplo, W. Snell (1580-1626), 35 cifras decimales exactas usando un polígono de 2^{30} lados

El Cálculo: Leibniz y Euler

Leibniz (1646-1716)

“El Señor ama los números impares” (1682)

Fórmula de Leibniz

- $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ...$

Fórmula de Leibniz

- $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ...$$
- Leibniz dedujo su fórmula mediante técnicas geométricas y usando cálculo integral.

Fórmula de Leibniz

- $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ...$
- Leibniz dedujo su fórmula mediante técnicas geométricas y usando cálculo integral.
- Para obtener 50 decimales exactos de π es necesario sumar 10^{50} términos.

Fórmula de Leibniz

- $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$
- Leibniz dedujo su fórmula mediante técnicas geométricas y usando cálculo integral.
- Para obtener 50 decimales exactos de π es necesario sumar 10^{50} términos.
- Euler: “Labor fere in aeternum” (1737)

Euler

Leonhard Euler (1707-1783)

Fórmulas de Euler

- Problema (Jacob Bernoulli, 1654-1705)

Fórmulas de Euler

- Problema (Jacob Bernoulli, 1654-1705)
- $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + ... = $?

Fórmulas de Euler

- Problema (Jacob Bernoulli, 1654-1705)
- $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + ... =$?
- Solución de Euler: $\dfrac{\pi^2}{6} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + ...$

Fórmulas de Euler

- Problema (Jacob Bernoulli, 1654-1705)
- $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... =$?
- Solución de Euler: $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...$
- Más: $\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + ...$

Fórmulas de Euler

- Problema (Jacob Bernoulli, 1654-1705)
- $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=$?
- Solución de Euler: $\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$
- Más: $\frac{\pi^4}{90}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots$
- $\frac{\pi^6}{945}=1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots$

Fórmulas de Euler

- Problema (Jacob Bernoulli, 1654-1705)
- $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...=$?
- Solución de Euler: $\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...$
- Más: $\frac{\pi^4}{90}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+...$
- $\frac{\pi^6}{945}=1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+...$
- Y muchas más...

La aparición del ordenador. Ramanujan

- 1987: se calcula π con 100 millones de cifras decimales exactas

La aparición del ordenador. Ramanujan

- 1987: se calcula π con 100 millones de cifras decimales exactas
- Gracias al desarrollo tecnológico y

La aparición del ordenador. Ramanujan

- 1987: se calcula π con 100 millones de cifras decimales exactas
- Gracias al desarrollo tecnológico y
- Algoritmos desarrollados por Ramanujan, casi 100 años antes

Ramanujan

Srinavasa Ramanujan (1887-1920)

Fórmula de Ramanujan

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{[1103 + 26390n]}{396^{4n}}$$

($n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3{\cdot}2{\cdot}1$)
Cada sumando de la serie aporta 8 decimales exactos.

Nuevos algoritmos

(D. Bailey, P. Borwein, S. Plouffe, 1997)

Nuevos algoritmos

(D. Bailey, P. Borwein, S. Plouffe, 1997)

Teorema

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right)$$

- Se puede demostrar haciendo uso de Cálculo de una variable.

- Se puede demostrar haciendo uso de Cálculo de una variable.
- Con 1 sumando, se obtiene $3{,}13333...$ (DERIVE)

- Se puede demostrar haciendo uso de Cálculo de una variable.
- Con 1 sumando, se obtiene $3{,}13333\ldots$ (DERIVE)
- Con 2 sumandos, $3{,}141422466\ldots$
  Con 5 sumandos, $3{,}141592653\ldots$.

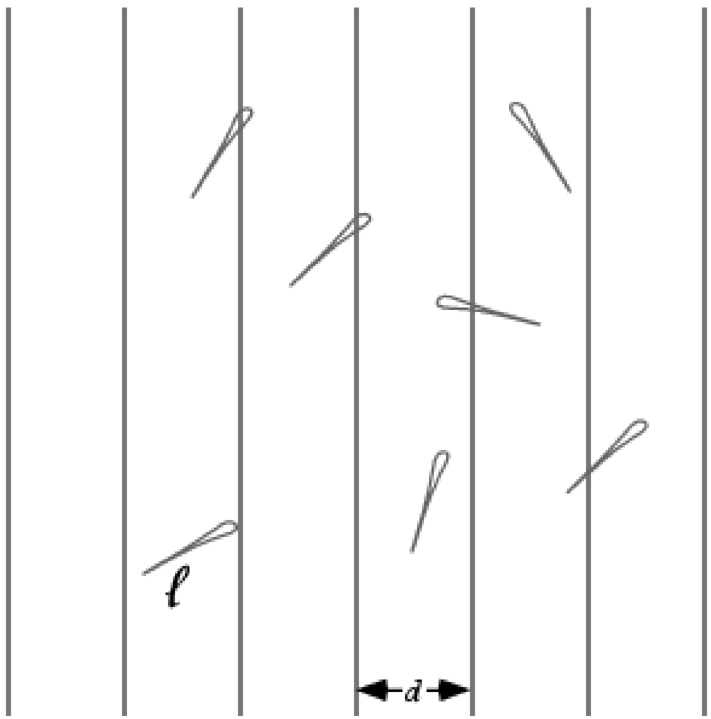
- Se puede demostrar haciendo uso de Cálculo de una variable.
- Con 1 sumando, se obtiene $3{,}13333\ldots$ (DERIVE)
- Con 2 sumandos, $3{,}141422466\ldots$
  Con 5 sumandos, $3{,}141592653\ldots$.
- Millones de dígitos en menos de 1 segundo.

La aguja de Buffon y otros juegos de azar

Problema (Conde de Buffon, 1777):
Supongamos que tiramos una aguja sobre un papel rayado con paralelas separadas a la misma longitud. ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja toque a alguna de las líneas?

La aguja de Buffon y otros juegos de azar

Problema (Conde de Buffon, 1777):
Supongamos que tiramos una aguja sobre un papel rayado con paralelas separadas a la misma longitud. ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja toque a alguna de las líneas?



La aguja de Buffon

Solución:
Si $l =$long. de la aguja y $d =$distancia entre las líneas, entonces la probabilidad de que la aguja toque a una línea es

$$p = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}$$

En particular: si $l = d$, entonces

$$p = \frac{2}{\pi}$$

La aguja de Buffon

Algunos datos experimentales históricos

	Año	núm. lanzamientos	valor experimental
Wolf	1850	5000	3.1596
Smith	1855	3204	3.1553
Fox	1884	1120	3.1419
Lazzarini	1901	3408	3.1414929

La aguja de Buffon

Algunos datos experimentales históricos

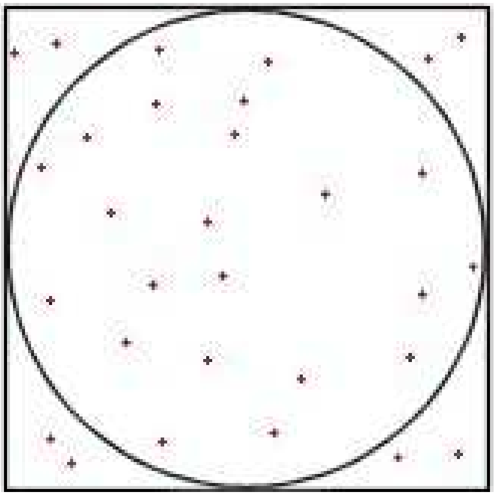
	Año	núm. lanzamientos	valor experimental
Wolf	1850	5000	3.1596
Smith	1855	3204	3.1553
Fox	1884	1120	3.1419
Lazzarini	1901	3408	3.1414929

Para un error menor que $\epsilon = 2{\cdot}10^{-7}$, el número de lanzamientos debería haber sido del orden de

$$1{,}156675{\cdot}10^{14}$$

$3{,}6{\cdot}10^{6}$ años.

Método de Monte Carlo



$$\frac{\text{área círc.}}{\text{área cuad.}} = \frac{\pi}{4}$$

Entonces,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\text{N}^0 \text{ impactos círculo}}{\text{N}^0 \text{ impactos totales}}$$

Cronología computacional de π

- "Hizo también de fundición una gran concha, toda redonda, de diez codos de diámetro, de un borde a otro [...] y un cordón de unos treinta codos ceñía toda su circunferencia"
  III Reyes, 7:23, Antiguo Testamento

Cronología computacional de π

- “Hizo también de fundición una gran concha, toda redonda, de diez codos de diámetro, de un borde a otro [...] y un cordón de unos treinta codos ceñía toda su circunferencia”
  III Reyes, 7:23, Antiguo Testamento
- “Y una gran pila de hierro fundido, que tenía diez codos de borde a borde, redonda perfectamente [...], y un cordoncillo de treinta codos abrazaba toda su circunferencia”
  II Paralipómenon, 4:2, Antiguo Testamento

- Arquímedes, 250 a.C., demuestra
$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$
(Ver página web del IES Los Cantos, Bullas (Murcia)
http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp
/matema/indice.htm)

- Arquímedes, 250 a.C., demuestra
  $$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$
  (Ver página web del IES Los Cantos, Bullas (Murcia) http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp /matema/indice.htm)
- Al-Kashi en 1429, 14 decimales.

- Arquímedes, 250 a.C., demuestra
  $$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$
  (Ver página web del IES Los Cantos, Bullas (Murcia) http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp /matema/indice.htm)
- Al-Kashi en 1429, 14 decimales.
- Van Ceulen en 1610, 35 decimales.

- Arquímedes, 250 a.C., demuestra
$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$
(Ver página web del IES Los Cantos, Bullas (Murcia)
http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp
/matema/indice.htm)
- Al-Kashi en 1429, 14 decimales.
- Van Ceulen en 1610, 35 decimales.
- Shanks en 1874, 707 (525 correctos).

- Arquímedes, 250 a.C., demuestra
  $$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$
  (Ver página web del IES Los Cantos, Bullas (Murcia) http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp /matema/indice.htm)
- Al-Kashi en 1429, 14 decimales.
- Van Ceulen en 1610, 35 decimales.
- Shanks en 1874, 707 (525 correctos).
- Actualidad: billones de dígitos.

Qué sabemos y qué no sabemos

“... y ese número π que, irracional para las mentes sublunares, por divina razón vincula necesariamente la circunferencia con el diámetro de todos los círculos posibles, por lo que el compás de ese vagar de una esfera entre uno y otro polo era el efecto de una arcana suspensión, la dualidad de una dimensión abstracta, la naturaleza ternaria de π, el tetrágono secreto de la raíz, la perfección del círculo.”

Qué sabemos y qué no sabemos

“... y ese número π que, irracional para las mentes sublunares, por divina razón vincula necesariamente la circunferencia con el diámetro de todos los círculos posibles, por lo que el compás de ese vagar de una esfera entre uno y otro polo era el efecto de una arcana suspensión, la dualidad de una dimensión abstracta, la naturaleza ternaria de π, el tetrágono secreto de la raíz, la perfección del círculo.”

El péndulo de Foucault, Umberto Eco

Sabemos:

- π es irracional. (Lambert, 1761)
  (Una demostración para Bachillerato:
  I. Niven, *A simple Proof that* π *is irrrational*, 1947. Ver página 494 de G.F. Simmons).

Sabemos:

- π es irracional. (Lambert, 1761)
  (Una demostración para Bachillerato:
  I. Niven, *A simple Proof that π is irrational*, 1947. Ver página 494 de G.F. Simmons).
- π no es algebraico. (Lindemann, 1882)

Sabemos:

- π es irracional. (Lambert, 1761)
  (Una demostración para Bachillerato:
  I. Niven, *A simple Proof that π is irrrational*, 1947. Ver página 494 de G.F. Simmons).
- π no es algebraico. (Lindemann, 1882)
- Los primeros mil millones de dígitos se distribuyen regularmente.

Sabemos:

- π es irracional. (Lambert, 1761)
  (Una demostración para Bachillerato:
  I. Niven, *A simple Proof that π is irrational*, 1947. Ver página 494 de G.F. Simmons).
- π no es algebraico. (Lindemann, 1882)
- Los primeros mil millones de dígitos se distribuyen regularmente.
- La secuencia 123456789 aparece en el dígito 523551502, por primera vez.

No sabemos:

- Si la expresión decimal contiene infinitos doses, o infinitos treses, etc.

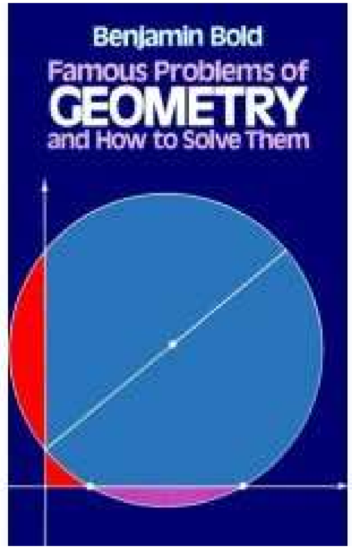
No sabemos:

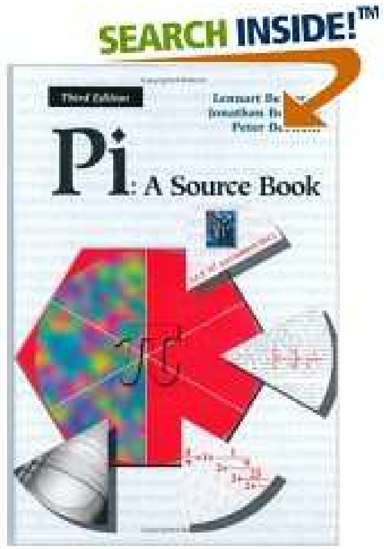
- Si la expresión decimal contiene infinitos doses, o infinitos treses, etc.
- Si $\pi + e$ es trascendente o incluso irracional.

No sabemos:

- Si la expresión decimal contiene infinitos doses, o infinitos treses, etc.
- Si $\pi + e$ es trascendente o incluso irracional.
- Y probablemente nadie sabrá nunca cuál es el dígito 10^{10000} de π.

Algunos libros





Conclusión

- ¿Por qué ese empeño en calcular decimales del número π?

Conclusión

- ¿Por qué ese empeño en calcular decimales del número π?
- Con $\pi = 3'14$, suficiente para llegar a la Universidad

Conclusión

- ¿Por qué ese empeño en calcular decimales del número π?
- Con $\pi = 3'14$, suficiente para llegar a la Universidad
- Con 40 cifras exactas, suficiente para calcular el perímetro de una circunferencia que abarque el Universo con error menor que el radio del átomo de Hidrógeno.

Conclusión

- ¿Por qué ese empeño en calcular decimales del número π?
- Con $\pi = 3'14$, suficiente para llegar a la Universidad
- Con 40 cifras exactas, suficiente para calcular el perímetro de una circunferencia que abarque el Universo con error menor que el radio del átomo de Hidrógeno.
- ¿Por qué los matemáticos no se conforman con 50 decimales?

Posibles razones

- π es un campo de pruebas para medir "potencia" computacional de ordenadores

Posibles razones

- π es un campo de pruebas para medir "potencia" computacional de ordenadores
- La búsqueda de resultados más precisos permite descubrir nuevos resultados en *Teoría de Números* y *Cálculo Numérico*

Posibles razones

- π es un campo de pruebas para medir “potencia” computacional de ordenadores
- La búsqueda de resultados más precisos permite descubrir nuevos resultados en *Teoría de Números* y *Cálculo Numérico*
- ¿Conseguir entrar en el Guinness?

Posibles razones

- π es un campo de pruebas para medir “potencia” computacional de ordenadores
- La búsqueda de resultados más precisos permite descubrir nuevos resultados en *Teoría de Números* y *Cálculo Numérico*
- ¿Conseguir entrar en el Guinness?
- Puro entretenimiento...

“La naturaleza se reduce a un número: π.
Quien descubra el misterio de π, comprenderá el pensamiento de Dios...”

Isaac Newton