EXAMEN DICIEMBRE-2006.

1 a) ¿Es cierto que $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$? Demostrarlo o encontrar un valor de z que no satisfaga la igualdad.
b) ¿Es posible que el valor máximo de $|\cos z|$ para valores de $z \in A = \{z = x + iy : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1\}$ se pueda alcanzar en un punto interior de A?
b) Calcular el valor máximo de $|\cos z|$ para valores de $z \in A$

2 a) Clasificar los puntos singulares de $f(z) = \dfrac{z^2 + \pi^2}{e^z + 1}$ y calcular los residuos correspondientes.
b) Determinar que tipo de serie es el desarrollo de $f(z)$ en potencias de $z - \frac{\pi}{2}$, así como su región de convergencia.

3

1. Sea $h(z)$ analítica en $B_2 = B(0, 2)$, tal que $h(z) \neq 0$ si $|z| = 1$. Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = C$$

en donde C es el número de ceros de $h(z)$ en el interior de $|z| = 1$ (contando su multiplicidad).

2. Sea $f(z)$ analítica en B_2, tal que $|f(z)| \leq a < 1$ si $|z| = 1$. Demostrar la continuidad de la función $\phi(t)$ definida como:

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1 - tf'(z)}{z - tf(z)} dz$$

para t real, $0 \leq t \leq 1$. ($\phi(t)$ determina el número de ceros de $z - tf(z)$ en el interior de $|z| = 1$).

3. Calcular $\phi(0)$ y $\phi(1)$ y demostrar que existe un único $z_0 \in B(0, 1)$ tal que $f(z_0) = z_0$

4 Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2 (x^2 + 9)} dx.$$

EXAMEN DICIEMBRE-2006. SOLUCION

1 a)

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{-4} + \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

b) Si el máximo de $|\cos z|$ se alcanza en$z_0 \in \mathring{A}$ entonces, por el principio del módulo máximo, $\cos z$ es constante en un entorno de z_0 y su derivada $(-\operatorname{sen} z)$ es nula en ese entorno, lo que no es cierto.
c)

$$|\cos(x+iy)|^2 = \left|\frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}|e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x)|^2 =$$

$$= \left|\cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i \operatorname{sen} x \frac{e^y - e^{-y}}{2}\right|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y = \cos^2 x (1 + \operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y$$

$$= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$$

de modo que el valor máximo se alcanza para $x = 0$ e $y = 1$ y es

$$\sqrt{\cos^2 0 + \operatorname{senh}^2 1} = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 1} = |\cos(i)|$$

Alternativa: Como el máximo se alcanza en un punto de la frontera, bastaba con estudiar $\cos x$, $\cos(iy)$, $\cos(x+i)$ y $\cos(1+iy)$, para $0 \le x \le 1$ y $0 \le y \le 1$

2 a) Los puntos singulares de $f(z) = \dfrac{z^2+\pi^2}{e^z+1}$ son los ceros de $e^z + 1$: $z_k = -i\pi + 2k\pi i = (2k-1)\pi i$.
La derivada de cualquier orden de e^z evaluada en z_k es siempre -1. Luego:

$$e^z + 1 = -(z-z_k) - \frac{1}{2!}(z-z_k)^2 - \frac{1}{3!}(z-z_k)^3 \cdots = (z-z_k)\varphi_k(z); \quad \varphi_k(z_k) = -1$$

Entonces

$$f(z) = \frac{z^2+\pi^2}{e^z+1} = \frac{(z-i\pi)(z+i\pi)}{(z-z_k)\varphi_k(z)}$$

$z_0 = -i\pi$ y $z_1 = i\pi$ son singularidades evitables. Los restantes z_k son polos simples y el residuo correspondiente es

$$\frac{-\pi^2(2k-1)^2 + \pi^2}{-1} = \pi^2((2k-1)^2 - 1) = \pi^2 4k(k-1)$$

b) El desarrollo de $f(z)$ en potencias de $z - \frac{\pi}{2}$ es una serie de Taylor cuyo radio de convergencia es $R = |\frac{\pi}{2} - i3\pi| = \pi\frac{\sqrt{37}}{2}$

3 1. Si $h(z)$ tiene un cero de orden k en z_0 entonces $h(z) = (z-z_0)^k\varphi(z)$ con $\varphi(z_0) \neq 0$ y

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{k(z-z_0)^{k-1}\varphi(z) + (z-z_0)^k\varphi'(z)}{(z-z_0)^k\varphi(z)} = \frac{k}{z-z_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

y z_0 es un polo simple de $\dfrac{h'}{h}$ con residuo igual a k. Aplicando el teorema del residuo:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \sum k = C$$

en donde C es el número de ceros de $h(z)$ en el interior de $|z| = 1$ (contando su multiplicidad).

2.

$$|z| = |z - tf(z) + tf(z)| \le |z - tf(z)| + |tf(z)| \le |z - tf(z)| + |f(z)| \; si \; 0 \le t \le 1.$$

Por lo tanto, si $|z| = 1$,

$$|z - tf(z)| \ge |z| - |f(z)| \ge 1 - a$$

Entonces

$$\phi(t_1) - \phi(t_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left(\frac{1 - t_1 f'(z)}{z - t_1 f(z)} - \frac{1 - t_2 f'(z)}{z - t_2 f(z)}\right) dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{(t_1 - t_2)f(z) - (t_1 - t_2)zf'(z)}{(z - t_1 f(z))(z - t_2 f(z))} dz$$

y

$$|\phi(t_1)-\phi(t_2)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{|t_1-t_2||f(z)-zf'(z)|}{|z-t_1f(z)||z-t_2f(z)|}|dz| \le \frac{1}{2\pi}|t_1-t_2|\frac{M}{(1-a)^2}2\pi = \frac{M}{(1-a)^2}|t_1-t_2|$$

siendo M el supremo de $|f(z)-zf'(z)|$ para $|z|=1$. La continuidad es consecuencia de la desigualdad.

3. Como $\phi(t)$ es continua y sólo toma valores enteros, debe ser constante.

$$\phi(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}dz = 1 = \phi(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1-f'(z)}{z-f(z)}dz$$

y el número de ceros de $z-f(z)$ en el interior de $|z|=1$ es exactamente 1.

4 $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+4)^2(z^2+9)}$ tiene puntos singulares en $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 3i$ y $z_4 = -3i$. Los dos primeros son polos de orden 2 y los otros polos simples.
El residuo de $f(z)$ en $z_3 = 3i$ es

$$Res(f,z_3) = \lim_{z\to z_3}(z-z_3)f(z) = \lim_{z\to z_3}\frac{(z-z_3)z^2}{(z^2+4)^2(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{z_3^2}{(z_3^2+4)^2(z_3-z_4)} = \frac{-9}{(-9+4)^2 6i} = \frac{-3}{50i}$$

Para z_1, escribimos

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_1)^2}\frac{z^2}{(z-z_2)^2(z^2+9)} = \frac{1}{(z-z_1)^2}\varphi(z)$$

siendo $\varphi(z)$ analítica en z_1 y $\varphi(z_1)\neq 0$.

$$Res(f,z_1) = \varphi'(z_1) = \frac{2z_1(z_1-z_2)^2(z_1^2+9) - z_1^2(2(z_1-z_2)(z_1^2+9)+(z_1-z_2)^2 2z_1)}{(z_1-z_2)^4(z_1^2+9)^2} =$$

$$\frac{2z_1(z_1-z_2)(z_1^2+9) - z_1^2(2(z_1^2+9)+(z_1-z_2)2z_1)}{(z_1-z_2)^3(z_1^2+9)^2} = \frac{4i4i(-4+9)+4(2(-4+9)+4i4i)}{(4i)^3(-4+9)^2} = \frac{-80+4(10-16)}{-64i25} =$$

$$\frac{-104}{-1600i} = \frac{13}{200i}$$

Para R suficientemente grande:

$$\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{(x^2+4)^2(x^2+9)}dx + \int_{|z|=R}\frac{z^2}{(z^2+4)^2(z^2+9)}dz = 2\pi i\left(\frac{-3}{50i}+\frac{13}{200i}\right) = \frac{2\pi}{200}.$$

Si $|z|=R$,

$$R^2 = |z^2| = |z^2+4-4| \le |z^2+4|+4 \ \Rightarrow\ |z^2+4| \ge R^2-4$$

y, análogamente

$$|z^2+9| \ge R^2-9$$

Entonces,

$$\left|\int_{|z|=R}\frac{z^2}{(z^2+4)^2(z^2+9)}dz\right| \le \int_{|z|=R}\frac{R^2}{|z^2+4|^2|z^2+9|}|dz| \le \frac{2\pi R^3}{(R^2-4)^2(R^2-9)} \longrightarrow 0 \ si\ R\to\infty$$

Tomando límites,

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+4)^2(x^2+9)}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)^2(x^2+9)}dx = \frac{\pi}{200}.$$