EXAMEN FEBRERO-2007.

1 Resolver las siguiente ecuación:

$$(y^2 + 4ye^x)dx + 2(y + e^x)dy = 0$$

2 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix}$$

obtener la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

3 Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas:

$$x = 2y + 2 + ce^{-y}$$

4 Encontrar la solución del siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 8y = -12e^{-4x} + 16 \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = -12 \end{cases}$$

5 a) Probar que

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \cdot 2\pi$$

siendo $n \in \mathbb{N}$

b) ¿Cual es el valor de $\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}\theta d\theta$?

6 Determinar el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1 + 2z^2}{z^3 + z^5}$$

en una corona de la forma $0 < |z| < R$, indicando el mayor valor de R para el que dicha serie es convergente.

7 Sea $f(z)$ una función entera tal que

$$Im(f(z)) > 1 \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}$$

Demostrar que $f(z)$ debe ser constante.
Si la función $f(z)$ es tal que $Im(f(z)) > -1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, ¿se puede concluir el mismo resultado?. Demostrarlo si la respuesta es afirmativa, o encontrar un contraejemplo.

8 Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 5x}{x^4 + x^2 + 1} dx.$$