

### JUNIO 2001. A

1 Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real  $a$ :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

- a) Discútase el sistema según los valores de  $a$
- b) Resuélvase el sistema para  $a = -1$ .
- 2 Una empresa fabrica cajas de latón sin tapa de volumen  $500 \text{ cm}^3$ , para almacenar un líquido colorante. Las cajas tienen la base cuadrada. Hállense la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de latón empleada en fabricarlas sea la mínima posible.
- 3 Una fábrica produce tres modelos de coche: A, B y C. Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diesel. Sabemos que el 60 % de los modelos son de tipo A y el 30 % de tipo B. El 30 % de los coches fabricados tienen motor diesel, el 30 % de los coches del modelo A son de tipo diesel y el 20 % de los coches del modelo B tienen motor diesel. Se elige un coche al azar. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos:
- a) El coche es del modelo C.
- b) El coche es del modelo A, sabiendo que tiene motor diesel.
- c) El coche tiene motor diesel, sabiendo que es del modelo C.
- 4 Un establecimiento vende paquetes de carbón para barbacoa de peso teórico  $10 \text{ Kg}$ . Se supone que el peso de los paquetes sigue una distribución normal con desviación típica  $1 \text{ Kg}$ . Para contrastar la citada hipótesis, frente a que el peso teórico sea distinto de  $10 \text{ Kg}$ , se escogen al azar 4 paquetes que pesan en  $\text{Kg}$ , respectivamente:

8, 10, 9, 8

Se desea que la probabilidad de aceptar la hipótesis nula, cuando ésta es cierta, sea  $0'95$ . Se pide:

- (a) La región crítica del contraste.
- (b) ¿Se debe rechazar la hipótesis nula?

### JUNIO 2001. B

5 En un depósito se almacenan bidones de petróleo y gasolina. Para poder atender la demanda se han de tener almacenados un mínimo de 10 bidones de petróleo y 20 de gasolina. Siempre debe haber más bidones de gasolina que de petróleo, siendo la capacidad del depósito de 200 bidones. Por razones comerciales, deben mantenerse en inventario al menos 50 bidones. El gasto de almacenaje de un bidón de petróleo es de 20 pesetas y el de uno de gasolina de 30 pesetas. Se desea saber cuantos bidones de cada clase han de almacenarse para que el gasto de almacenaje sea mínimo.

- a) Exprésense la función objetivo y las restricciones del problema.
- b) Representétese gráficamente la región factible y calcúlense los vértices de la misma.
- c) Resuélvase el problema.

6 Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

- (a) Determinéense sus máximos y mínimos relativos.
- (b) Calcúlense sus puntos de inflexión.
- (c) Esbócese su gráfica
- 7 Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. En una hora la máquina A fabrica 600 tornillos, la B 300 y la C 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de  $0'01$  para A, de  $0'02$  para B y de  $0'03$  para C. Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar.

- a) ¿Cual es la probabilidad de que no sea defectuoso?
- b) ¿Cual es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina A, sabiendo que no es defectuoso?
- 8 Se supone que el peso de las sandías de cierta variedad sigue una distribución normal con desviación típica de 1 kg. Se toma una muestra aleatoria de 100 sandías y se observa que el peso medio es de 6 kg.
- (a) Calcúlese el intervalo de confianza al 95 % para el peso medio de esa variedad de sandía.
- (b) ¿Puede aceptarse la hipótesis de que el verdadero peso medio de las sandías es de 5 kg frente a que sea diferente, con un nivel de significación de 0'05?

### SEPTIEMBRE 2001. A

9 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- (a) Determínese si  $A$  y  $B$  son invertibles y, en su caso, calcúlese la matriz inversa.
- (b) Resuélvase la ecuación matricial  $XA - B = 2I$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden tres.
- (c) Calcúlese  $A^{86}$
- 10 Sean las funciones  $f(x) = x^2 + ax + b$ ,  $g(x) = -x^2 + c$
- (a) Determínense  $a$ ,  $b$  y  $c$ , sabiendo que las gráficas de ambas funciones se cortan en los puntos  $(2, -3)$  y  $(1, 0)$ .
- (b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $g(x)$  en el punto  $(-2, -3)$ .
- (c) Calcúlese el área de la región limitada por las gráficas de  $f(x)$  y  $g(x)$ .
- 11 El peso de los perros adultos de una cierta raza es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con desviación típica 0'6 kg. Una muestra aleatoria de 30 animales ha dado un peso medio de 7'4 kg.
- (a) Calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para el peso medio de los perros adultos de esta raza.
- (b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para tener una confianza del 95 % de que la media muestral no se diferencie en mas de 0'3 kg de la media de la población?
- 12 En un videoclub quedan 8 copias de la película A, 9 de la B y 5 de la C. Entran tres clientes consecutivamente y cada uno elige una copia al azar. Calcúlese la probabilidad de que:
- (a) Los tres escojan la misma película.
- (b) Dos escojan la película A y el otro la C.

### SEPTIEMBRE 2001. B

13 Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4 % en un cierto producto A, un 6 % en el producto B y un 5 % en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8 % sobre el precio inicial de A, un 10 % sobre el precio inicial de B y un 6 % sobre el precio inicial de C.

Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta un producto A, dos B y tres C, se ahorra 16 euros respecto del precio inicial. Si compra tres productos A, uno B y cinco C en la segunda oferta, el ahorro es de 29 euros. Si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros.

Calcúlese el precio de cada producto antes de las ofertas.

14 Sea la función

$$f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

Calcúlense:

- (a) Los intervalos donde es creciente y decreciente.
- (b) Las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

(c) El valor de  $x$  para el que es máxima la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$ .

15 En un laboratorio se obtuvieron seis determinaciones del  $pH$  de una solución, con los resultados siguientes:

$$7'91 \quad 7'94 \quad 7'90 \quad 7'93 \quad 7'89 \quad 7'91$$

Se supone que la población de todas las determinaciones de  $pH$  de una solución tiene una distribución normal de media desconocida con desviación típica igual a  $0'02$ .

- (a) Determinése un intervalo de confianza al 98% para la media de todas las determinaciones del  $pH$  de la misma solución obtenidas con el mismo método.
- (b) Con el mismo nivel de confianza anterior, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza sea a lo sumo  $0'02$ ?

16 Con el objetivo de recaudar fondos para un viaje, los alumnos de un instituto realizan una rifa con 500 números. Un alumno compra dos números.

- (a) Si sólo hay un premio, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque a él?
- (b) Si hay dos premios, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque al menos uno de ellos?

#### JUNIO 2002. A

17 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcular las matrices  $M = AB$  y  $N = BA$ .
- (b) Calcular  $P^{-1}$ , siendo  $P = N - I$ , donde  $I$  representa la matriz identidad.
- (c) Resolver el sistema  $PX = C$

18 (a) Hallar las coordenadas del mínimo de la curva  $y = x^2 - 4x - 5$

(b) Calcular el área del triángulo limitado por el eje  $OX$  y las tangentes a la curva dada en los puntos de intersección de dicha curva con el eje  $OX$

19 Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas y 4 negras; la segunda contiene 5 bolas y, la tercera, 4 blancas y 3 negras.

- (a) Si se elige una caja al azar y luego se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?
- (b) Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?

20 Se quiere comprobar si una máquina destinada al llenado de envases de agua mineral ha sufrido un desajuste. Una muestra aleatoria de diez envases de esta máquina ha proporcionado los resultados siguientes:

$$0'49 \quad 0'52 \quad 0'51 \quad 0'48 \quad 0'53 \quad 0'55 \quad 0'49 \quad 0'50 \quad 0'52 \quad 0'49$$

Suponiendo que la cantidad de agua mineral que este tipo de máquinas deposita en cada envase sigue una distribución normal de media  $0'5$  litros y desviación típica  $0'02$  litros, se desea contrastar si el contenido medio de los envases de esta máquina es de  $0'5$  litros, con un nivel de significación del 5%.

- (a) Plantear la hipótesis nula y alternativa del contraste.
- (b) Determinar la región crítica del contraste.
- (c) Realizar el contraste.

#### JUNIO 2002. B

**21** Un proyecto de asfaltado puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa:  $G_1$  y  $G_2$ . Se trata de asfaltar tres zonas: A, B y C. En una semana, el grupo  $G_1$  es capaz de asfaltar 3 unidades en la zona A, 2 en la zona B y 2 en la zona C. El grupo  $G_2$  es capaz de asfaltar semanalmente 2 unidades en la zona A, 3 en la zona B y 2 en la zona C. El coste semanal se estima en 3300 euros para  $G_1$  y en 3500 euros para  $G_2$ . Se necesita asfaltar un mínimo de 6 unidades en la zona A, 12 en la zona B y 10 en la zona C. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

**22** Se considera la curva de ecuación

$$y = x^3 - 4x$$

- (a) Hallar las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordenados y de sus máximos y mínimos relativos, si existen.
- (b) Representar gráficamente la curva.
- (c) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la curva y el eje  $OX$ .

**23** Se lanzan dos dados equilibrados de seis caras tres veces consecutivas:

- (a) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga el seis doble.
- (b) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga un doble distinto del seis doble.

**24** La duración de las llamadas de teléfono, en una oficina comercial, sigue una distribución normal con desviación típica 10 segundos. Se hace una encuesta entre 50 llamadas y la media de duración obtenida en esa muestra es 35 segundos. Calcular un intervalo de confianza al 99% para la duración media de las llamadas.

#### SEPTIEMBRE 2002.A

**25** Encontrar todas las matrices  $X$  tales que  $AX = XA$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

**26** Para cada valor de  $a$  se considera la función  $f(x) = \frac{3x^2 - ax}{x + 2}$ . Se pide:

- (a) Calcular el valor de  $a$  para que  $f(x)$  tenga un mínimo relativo en  $x = 2$ .
- (b) Hallar las asíntotas de la curva  $y = f(x)$  para el valor  $a = 3$ .

**27** Una persona desea jugar en una atracción de feria, donde regalan un peluche, si al tirar un dardo se acierta en un blanco. Si sólo se permite tirar tres dardos y la probabilidad de acertar en cada tirada es  $0'3$ ,

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche exactamente en el tercer intento? ¿y de llevárselo exactamente en el segundo?

**28** Los depósitos mensuales, en euros, en una entidad bancaria, siguen una distribución normal de media  $\mu$  y de desviación típica  $\sigma = 5'1$ . Con el fin de contrastar si la media de los depósitos mensuales es 20 euros se toma una muestra de tamaño 16, resultando ser la media muestral 22'4 euros. ¿Se puede aceptar la hipótesis de que la media es 20 a un nivel de significación del 5%?

#### SEPTIEMBRE 2002.B

**29** Determinar los valores máximo y mínimo de la función  $z = 3x + 4y$  sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned} 3x + y &\geq 3 \\ x + y &\leq 5 \\ x &\geq -2 \\ y &\leq 10 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

**30** Calcular el valor de  $a > 0$  en los siguientes casos:

(a)  $\int_0^3 \frac{1}{x+1} dx = a.$

(b)  $\int_0^a \frac{1}{x+1} dx = 3.$

(c)  $\int_0^3 \frac{1}{x+a} dx = 5.$

**31** Un día determinado, en una tienda de ropa joven, se han realizado 400 ventas pagadas con la tarjeta de crédito V y 350 ventas pagadas con la tarjeta MC. Las ventas restantes del día han sido abonadas en metálico. Se comprueba que 150 de las ventas pagadas con la tarjeta de crédito V superan los 150 euros, mientras que 300 de las compras pagadas con MC superan esa cantidad. Se extrae al azar un comprobante de las ventas del día pagadas con tarjeta de crédito.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 150 euros?

(b) Si la compra es inferior a 150 euros, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada con la tarjeta MC?

**32** De una población con distribución normal de media 50 y desviación típica 6, se extrae una muestra aleatoria de tamaño  $n$  y se calcula su media muestral.

(a) ¿Qué valor debe tener  $n$  para que se cumpla la desigualdad  $|\bar{x} - \mu| < 2$  con una probabilidad de 0'95?

(b) Resolver el apartado anterior con una probabilidad de 0'90. Comparar ambos resultados

#### JUNIO 2003. A

**33** Estudiar y resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

**34** Sean las funciones  $f(x) = x^2 - 9$ ,  $g(x) = x^2 - x - 6$ . Calcular

(a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$

(b) Los extremos relativos de  $g(x)$ , si existen.

(c) El área del recinto limitado por la gráfica de la función  $f(x)$ , el eje  $OX$  y las rectas  $x = 3$ ,  $x = 6$ .

**35** El 45 % del censo de cierta ciudad vota al candidato A, el 35 % al candidato B y el resto se abstiene. Se elige al azar tres personas del censo. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

(a) Las tres personas votan al candidato A.

(b) Dos personas votan al candidato A y la otra al candidato B.

(c) Al menos una de las tres personas se abstiene.

**36** Se estima que el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal con desviación típica 0'05 segundos. Si se quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere los 0'01 segundos con un nivel de confianza del 99 %, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempos de reacción?

#### JUNIO 2003. B

**37** Un vendedor quiere dar salida a 400 kg de garbanzos, 300 kg de lentejas y 250 kg de judías. Para ello hace dos tipos de paquetes. Los de tipo A contienen 2 kg de garbanzos, 2 kg de lentejas y 1 kg de judías y los de tipo B contienen 3 kg de garbanzos, 1 kg de lentejas y 2 kg de judías. El precio de venta de cada paquete es de 25 euros para los de tipo A y de 35 euros para los de tipo B ¿Cuántos paquetes de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende éste?

**38** Dada la función  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

(a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

- (b) Calcular sus asíntotas.
- (c) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en  $x = 0$ .
- 39** De una baraja española de 40 cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar. Determinar la probabilidad de obtener:
- (a) Tres reyes.
- (b) Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera.
- (c) Un as, un tres y un seis, en cualquier orden.
- 40** Se probaron 10 automóviles, escogidos aleatoriamente de una misma marca y modelo, por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares. Se obtuvo que el consumo medio de gasolina, en litros, por cada 100 kilómetros fue de 6'5. Estudios previos indican que el consumo de gasolina tiene una distribución normal de desviación típica 2 litros. Determinar un intervalo de confianza al 95 % para la media del consumo de gasolina de estos automóviles.

#### SEPTIEMBRE 2003. A

- 41** Calcular los valores de  $a$  para los cuales la inversa de la matriz

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

coincide con su transpuesta.

- 42** Se considera la función  $f(x) = xe^{x^2}$
- (a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .
- (b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de  $f(x)$  para  $x \geq 0$ , el eje  $OX$  y la recta  $x = 2$ .
- 43** Un test para detectar una sustancia contaminante en el agua, presenta los siguientes resultados: si el agua no está contaminada, suceso que ocurre con una probabilidad igual a 0'99, el resultado del test es que el agua está contaminada con una probabilidad igual a 0'05. Cuando el agua está contaminada, el test lo detecta con una probabilidad igual a 0'99. Se ha realizado una prueba y el test indica que hay contaminación. Calcular la probabilidad de que el agua no esté realmente contaminada. Interpretar el valor numérico obtenido.
- 44** El tiempo de conexión a Internet de los alumnos de cierta universidad, sigue una distribución normal con desviación típica 15 minutos. Para estimar la media del tiempo de conexión, se quiere calcular un intervalo de confianza que tenga una amplitud menor o igual que 6 minutos, con un nivel de confianza del 95 %. Determinar cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar.

#### SEPTIEMBRE 2003.B

- 45** Determinar los valores máximo y mínimo de la función  $z = 5x + 3y$  sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned} 3x + y &\geq 4 \\ x + y &\leq 6 \\ x &\leq 5 \\ 0 &\leq y \leq 5 \end{aligned}$$

- 46** Sea la función  $f(x) = \frac{-x^3 + 1}{2x^2 + 2x - 12}$ . Se pide:

- (a) Especificar su dominio de definición.
- (b) Estudiar su continuidad.
- (c) Calcular las asíntotas si las hubiera.

47 Se elige un número natural entre el 1 y el 20 de manera que todos tengan la misma probabilidad de ser escogidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 2 o por 3? ¿Cuál es la probabilidad de que sea divisible por 3 y no por 6?

48 Se ha extraído una muestra de 150 familias de residentes en un barrio obteniéndose que la renta familiar media de la misma asciende a 20000 euros. Se supone que la renta familiar de los residentes en el barrio sigue una distribución normal de desviación típica 1500 euros.

- (a) A partir de estos datos, calcular un intervalo de confianza para la renta familiar media con un nivel de confianza del 95 %.
- (b) ¿Qué tamaño muestral mínimo es necesario para conseguir, con un nivel de confianza del 90 %, un error en la estimación de la renta familiar media no superior a  $\pm 142$  euros

### JUNIO 2004. A

49 Un producto se compone de la mezcla de otros dos A y B. Se tienen 500 kg de A y 500 kg de B. En la mezcla, el peso de B debe ser menor o igual que 1'5 veces el de A. Para satisfacer la demanda, la producción debe ser mayor o igual que 600 kg. Sabiendo que cada kg de A cuesta 5 euros y cada kg de B cuesta 4 euros, calcular los kg de A y B que deben emplearse para hacer una mezcla de coste mínimo, que cumpla los requisitos anteriores. Obtener dicho coste mínimo.

50 Calcular la integral definida

$$\int_{-1}^1 (|x| + x + 1) dx$$

Nota.- La notación  $|x|$  representa el valor absoluto de  $x$ .

51 Dos expertos,  $E_1$  y  $E_2$ , realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. La probabilidad de que una peritación haya sido realizada por  $E_1$  es 0'55 y por  $E_2$  es 0'45. Si una peritación ha sido realizada por  $E_1$ , la probabilidad de que de lugar al pago de una indemnización es 0'98 y si ha sido realizada por  $E_2$ , la probabilidad de que de lugar al pago de una indemnización es 0'90. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por  $E_2$ .

52 En un servicio de atención al cliente, el tiempo de espera hasta recibir atención es una variable aleatoria normal de media 10 minutos y desviación típica 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes que llegan en un día concreto. Se pide:

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera en una muestra de 25 clientes no supere los 9 minutos?
- (b) ¿Cuál es la distribución de la media muestral si se toman muestras aleatorias de 64 clientes? Especificar sus parámetros.

### JUNIO 2004. B

53 Hallar todas las matrices

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

que satisfacen la ecuación matricial  $X^2 = 2X$

54 Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}}$$

- (a) Determinar su dominio de definición.
- (b) Obtener sus asíntotas.

55 En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0'02 y de que una de bajo consumo sea defectuosa es 0'09. Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?

**56** El precio de ciertos electrodomésticos puede considerarse una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 100 euros. Los precios en euros correspondientes a una muestra de 9 de estos electrodomésticos son:

255 85 120 290 80 80 275 290 135

- (a) Construir un intervalo de confianza al 98 % para la media poblacional.
- (b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra, para que con un nivel de confianza del 99 %, el error de estimación del precio medio no supere los 50 euros.

**SEPTIEMBRE 2004. A**

**57** Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real  $m$ :

$$\begin{cases} mx + y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -4 \\ x + my - mz = 1 \end{cases}$$

- (a) Discútase es sistema según los diferentes valores del parámetro  $m$
- (b) Resuélvase el sistema para  $m = 2$ .

**58** Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{a} - ax^2 + 5x + 10, \quad a \neq 0$$

- (a) Obtener los valores de  $a$  para los cuales la función  $f(x)$  tiene un máximo en  $x = 1$ .
- (b) Calcular los extremos relativos de  $f(x)$  para  $a = 3$  y representar la función.

**59** Una cierta señalización de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es 0'95 y de que se active el segundo es 0'90.

- (a) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active sólo uno de los indicadores.
- (b) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active al menos uno de los indicadores.

**60** Una muestra aleatoria de 9 tarrinas de helado proporciona los siguientes pesos en gramos

88 90 90 86 87 88 91 92 89

Hallar un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población, sabiendo que el peso de las tarrinas tiene una distribución normal con una desviación típica de 1'8 gramos.

**SEPTIEMBRE 2004. B**

**61** Un establecimiento de prendas deportivas tiene almacenados 1600 bañadores, 1000 gafas de baño y 800 gorros de baño. Se quiere incentivar la compra de estos productos mediante la oferta de dos tipos de lotes: el lote A, que produce un beneficio de 8 euros, formado por un bañador, un gorro y unas gafas, y el lote B que produce un beneficio de 10 euros y está formado por dos bañadores y unas gafas. Sabiendo que la publicidad de esta oferta tendrá un coste de 1.500 euros a deducir de los beneficios, se pide calcular el número de lotes A y B que harán máximo el beneficio y a cuánto asciende éste.

**62** Sean las funciones  $f(x) = x^2 - 2x - 8$ ,  $g(x) = -\frac{x^2}{2} + x + 4$ . Calcular

(a)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{g(x)}$

- (b) El área del recinto acotado limitado por las curvas  $f(x)$  y  $g(x)$ .

**63** En una población, el 40 % son hombres y el 60 % mujeres. En esa población el 80 % de los hombres y el 20 % de las mujeres son aficionados al fútbol.

- (a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al fútbol.
- (b) Elegida al azar una persona resulta ser aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- 64** Calcular el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria para garantizar que, en la estimación de la media de una población normal con varianza igual a 60, al 90 % de confianza, el error de estimación cometido no sea superior a 3 unidades.

### JUNIO 2005.A

- 65** Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real  $k$ :

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Se pide

- (a) Discutir el sistema para los distintos valores de  $k$
- (b) Resolver el sistema en los casos en los que sea posible.
- 66** La función
- $$B(x) = \frac{-x^2 + 9x - 16}{x}$$
- representa, en miles de euros, el beneficio neto de un proceso de venta, siendo  $x$  el número de artículos vendidos. Calcular el número de artículos que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determinar dicho beneficio máximo.
- 67** Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar sin reemplazamiento (sin devolverlos después y de manera consecutiva) cuatro huevos
- (a) Calcular la probabilidad de extraer los cuatro huevos en buen estado.
- (b) Calcular la probabilidad de extraer de entre los cuatro, exactamente un huevo roto.
- 68** En una encuesta se pregunta a 10.000 personas cuántos libros lee al año, obteniéndose una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2.
- (a) Hallar un intervalo de confianza al 80 % para la media poblacional.
- (b) Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0'25 con un nivel de confianza del 95 %, ¿a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar?

### JUNIO 2005.B

- 69** Un mayorista vende productos congelados que presenta en envases de dos tamaños: pequeño y grande. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 envases grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro para cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro para cada envase grande. ¿Qué cantidad de cada tipo de envases proporciona el mínimo gasto de almacenaje? Obtener dicho mínimo.
- 70** (a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = e^{2-x}$  en el punto donde ésta corta al eje de ordenadas.
- (b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función  $f(x) = x^2 - 4x$ , el eje  $OX$  y las rectas  $x = -1$ ,  $x = 4$ .
- 71** En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras, se pide calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: “Obtener tres unos”, “Obtener al menos un dos”, “Obtener tres números distintos” y “Obtener una suma de 4”.
- 72** Para una población  $N(\mu, \sigma = 25)$ , ¿qué tamaño muestral mínimo es necesario para estimar  $\mu$  mediante un intervalo de confianza, con un error menor o igual que 5 unidades, y con una probabilidad mayor o igual que 0'95 ?

### SEPTIEMBRE 2005. A

**73** En una empresa de alimentación se dispone de 24 *kg* de harina de trigo y 15 *kg* de harina de maíz, que se utilizan para obtener dos tipos de preparados: A y B. La ración del preparado A contiene 200 *gr* de harina de trigo y 300 *gr* de harina de maíz, con 600 *cal* de valor energético. La ración de B contiene 200 *gr* de harina de trigo y 100 *gr* de harina de maíz, con 400 *cal* de valor energético. ¿Cuántas raciones de cada tipo hay que preparar para obtener el máximo rendimiento energético total? Obtener el rendimiento máximo.

**74** Se considera la curva de ecuación  $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ . Se pide:

- (a) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto de abscisa  $x = 1$ .
- (b) Hallar las asíntotas de la curva.

**75** En un colectivo de inversores bursátiles, el 20 % realiza operaciones via Internet. De los inversores que realizan inversiones via Internet, un 80 % consulta InfoBolsaWeb. De los inversores bursátiles que no realizan inversiones via Internet sólo un 20 % consulta InfoBolsaWeb. Se pide:

- (a) Obtener la probabilidad de que un inversor bursátil elegido al azar en este colectivo consulte InfoBolsaWeb.
- (b) Si se elije al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta InfoBolsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por Internet?

**76** La duración de las baterías de un determinado modelo de teléfono movil tiene una distribución normal de media 34'5 horas y desviación típica 6'9 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de 36 teléfonos moviles.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración media de las baterías de la muestra esté comprendida entre 32 y 33'5 horas?
- (b) ¿Y de que sea mayor de 38 horas?

### SEPTIEMBRE 2005. B

**77** Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones que depende del parámetro real  $p$ :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + pz = -3 \\ x - 2y - z = p \end{cases}$$

- (a) Discutir el sistema según los distintos valores de  $p$
- (b) Resolver el sistema para  $p = 2$ .

**78** Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$$

- (a) Hallar sus asíntotas.
- (b) Calcular sus máximos y mínimos relativos si existen.

**79** Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos, tales que  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{2}{5}$  y  $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$ . Calcular

- (a)  $P(B/A)$
- (b)  $P(\bar{A}/B)$

**80** El tiempo de reacción de una alarma electrónica ante un fallo del sistema es una variable aleatoria normal con desviación típica 1 segundo. A partir de una muestra de 100 alarmas se ha estimado la media poblacional del tiempo de reacción, mediante un intervalo de confianza, con un error máximo de estimación igual a 0'2 segundos. ¿Con qué nivel de confianza se ha realizado la estimación?

### JUNIO 2006. A

81 Una papelería quiere liquidar hasta 78 kg de papel reciclado y hasta 138 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A y B. Los lotes A están formados por 1 kg del papel reciclado y 3 kg de papel normal y los lotes B por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote A es de 0'9 euros y el de cada lote B es de 1 euro. ¿Cuántos lotes A y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos?

82 Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = x^3 - 9x$$

- (a) Calcular sus máximos y mínimos relativos, si existen.
- (b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función  $f$  y el eje  $OX$ .

83 Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es  $2/3$ . El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se le riega es de 0'25. Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

84 En cierta población humana, la media muestral  $\bar{X}$  de una característica se distribuye mediante una distribución normal. La probabilidad de que  $\bar{X}$  sea menor o igual que 75 es 0'58 y la de que  $\bar{X}$  sea mayor que 80 es 0'04. Hallar la media y la desviación típica de  $\bar{X}$ . (Tamaño muestral  $n = 100$ ).

#### JUNIO 2006. B

85 Encontrar todas las matrices  $X$  cuadradas  $2 \times 2$  que satisfacen la igualdad

$$XA = AX$$

en cada uno de los siguientes casos

- a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- b)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

86 Se considera la curva de ecuación cartesiana

$$y = x^2 + 8x$$

- (a) Calcular las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta  $y = 2x$ .
- (b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva dada y de la recta de ecuación cartesiana  $y = x + 8$ .

87 Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada y un dado equilibrado. Se pide:

- (a) Describir el espacio muestral de este experimento.
- (b) Determinar la probabilidad del suceso: *Obtener una cara en la moneda y un número par en el dado.*

88 El tiempo de espera en minutos en una ventanilla se supone aproximado mediante una distribución  $N(\mu, \sigma)$  con  $\sigma$  igual a 3 minutos. Se lleva a cabo un muestreo aleatorio simple de 10 individuos y se obtiene que la media muestral del tiempo de espera es de 5 minutos. Determinar un intervalo de confianza al 95% para  $\mu$ .

#### SEPTIEMBRE 2006. A

89 Una empresa fabrica láminas de aluminio de dos grosores, finas y gruesas, y dispone cada mes de 400 kg de aluminio y 450 horas de trabajo para fabricarlas. Cada  $m^2$  de lámina fina necesita 5 kg de aluminio y 10 horas de trabajo, y deja una ganancia de 45 euros. Cada  $m^2$  de lámina gruesa necesita 20 kg y 15 horas de trabajo, y deja una ganancia de 80 euros. ¿cuántos  $m^2$  de cada tipo de lámina debe fabricar la empresa al mes para que la ganancia sea máxima, y a cuánto asciende ésta?

90 Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$$

- (a) Encontrar las asíntotas de la función.
- (b) Especificar el signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.

91 Los tigres de cierto país proceden de tres reservas: el 30 % de la primera, el 25 % de la segunda y el 45 % de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es 0'2 %, mientras que dicha proporción es 0'5 % en la segunda y 0'1 % en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino.

92 La duración de la batería de cierto teléfono móvil se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 5 meses. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 baterías y se obtienen las siguientes duraciones (en meses)

33 34 26 37 30 39 26 31 36 19

Hallar un intervalo de confianza al 95 % para la duración media de este modelo de batería.

### SEPTIEMBRE 2006. B

93 Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real  $a$ :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -2x + 3y + z = 1 \\ -x + ay + 3z = 3 \end{cases}$$

- (a) Discutir el sistema para los distintos valores de  $a$
- (b) Resolver el sistema para  $a = 2$ .

94 Representar gráficamente la región acotada limitada por la gráfica de las funciones

$$f(x) = 9 - x^2, \quad g(x) = 3 + x$$

y obtener su área.

95 Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

96 El peso en  $kg$  de los estudiantes universitarios de una gran ciudad se supone aproximado por una distribución normal con media 60  $kg$  y desviación típica 8  $kg$ . Se toman 100 muestras aleatorias simples de 64 estudiantes cada una. Se pide:

- (a) La media y la desviación típica de la distribución de la media muestral.
- (b) ¿En cuántas de las 100 muestras cabe esperar una media entre 59 y 61  $kg$ .

### MAYORES 2002.

97 El precio de salida a bolsa de las acciones de una sociedad ha sido de 12 euros. El precio ha evolucionado posteriormente según la ley  $p(x) = 12 + \frac{60x}{100 + x^2}$ , donde  $x$  representa el número de días transcurridos desde la salida a bolsa. Sabiendo que han transcurrido 90 días, determinar el valor máximo que han alcanzado las acciones y que día lo obtuvieron. ¿En qué momento la tasa de crecimiento ha sido mas alta?

98 Determinar, en caso de que existan, los valores del parámetro  $m$  que hacen que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea incompatible.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ -x + y - 2z = -1 \\ 2x - y + mz = 1 \end{cases}$$

Resolver el sistema cuando  $m = 4$ .

**99** El tiempo entre dos trenes consecutivos, en la misma dirección, en una estación de metro es una variable normal de media  $\mu = 6$  minutos y varianza  $\sigma^2 = 44$ , 12 minutos.

- (a) Un viajero acaba de perder un tren, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de 7 minutos y medio la llegada del siguiente?
- (b) Al llegar a la estación el viajero lee en un panel informativo que el último tren pasó hace 3 minutos, cuál es la probabilidad de que a lo sumo tenga que esperar otros tres minutos?

**100** El ayuntamiento de determinada localidad ha realizado un recuento del número de nacimientos que han tenido lugar cada mes durante los últimos 25 meses. Los datos se resumen en el siguiente cuadro:

<b>Número de nacimientos</b>	0	1	2	3	4	5
<b>Número de meses</b>	6	8	4	5	1	1

- (a) Calcular el número medio de nacimientos en un mes y la varianza de la variable número de nacimientos mensuales.
- (b) Determinar la mediana y la moda.

**MAYORES 2003.**

**101** Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcular las matrices  $P = AB$  y  $Q = BA$ .
- (b) Resolver el sistema  $PX = P^t - I$ , donde  $I$  es la matriz identidad de orden dos y  $P^t$  es la matriz transpuesta de  $P$ .

**102** Se considera la función  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ . se pide

- (a) Calcular sus extremos relativos.
- (b) Encontrar los puntos de corte de la curva  $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$  con el eje horizontal, así como las rectas tangentes a la curva en dichos puntos.

**103** Un estudio llevado a cabo en una sucursal bancaria ha revelado que el saldo al final de mes de las cuentas corrientes de sus clientes se distribuye de manera normal con media 1380 euros y desviación típica 600 euros.

- (a) Calcular el porcentaje de clientes que, al final de mes, tiene un saldo deudor.
- (b) Un determinado mes, el banco quiere obsequiar con un regalo a los clientes que mayor saldo tengan. El número de regalos de que disponen sólo les permite obsequiar al 2% del total de clientes. ¿cuál es el saldo mínimo para conseguir un regalo?

**104** En un experimento aleatorio se conocen los siguientes datos relativos a los sucesos A y B:

$$P(A) = 0'6, \quad P(B) = 0'4 \quad \text{y} \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0'15$$

- (a) Calcular  $P(A \cup B)$  y  $P(A \cap B)$
- (b) ¿Son independientes A y B ?

**MAYORES 2004.**

**105** Se considera la siguiente matriz dependiente del parámetro  $a$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- (a) Determinar todos los valores de  $a$  para los que tiene solución la ecuación matricial

$$AX = 2I,$$

siendo  $I$  la matriz identidad de orden 3.

- (b) Resolver la ecuación anterior si  $a = 2$ .

**106** (a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola  $y = x^2 - 6x + 6$  en el punto de abscisa  $x = 4$ .

- (b) Hallar el área de la región limitada por la parábola y la recta que la corta perpendicularmente en el punto de abscisa  $x = 4$ .

**107** El nivel de colesterol HDL en individuos de un determinado rango de edad es una variable normal de media  $67'75 \text{ mg/dl}$  y desviación típica  $11'35 \text{ mg/dl}$ . Determinar el porcentaje de individuos con un nivel de colesterol por encima de  $85 \text{ mg/dl}$ . En otro grupo de individuos, el nivel de colesterol HDL sigue siendo una variable normal con la misma media  $67'75 \text{ mg/dl}$  y diferente desviación típica. Calcular dicha desviación típica sabiendo que el percentil 95, es igual a  $83'42 \text{ mg/dl}$

**108** Una moneda ha sido trucada de tal manera que la probabilidad de obtener cara es el doble de la de obtener cruz.

- (a) ¿Cuál es el número esperado de caras en 6 lanzamientos?
- (b) Determinar la función de probabilidad de la variable aleatoria  $X$  que representa el número observado de cruces en 3 lanzamientos.

#### MAYORES 2005.

**109** Dado el sistema

$$\begin{array}{rccccrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & & & y & + & kz & = & 1 \\ x & + & 2y & & & = & k \end{array}$$

Se pide:

- (a) Discutir la solución del sistema en función del parámetro  $k$ .
- (b) Resolverlo para  $k = 2$ .

**110** (a) Calcular el vértice de la parábola  $y = -2x^2 + 12x + 14$  en el punto de abscisa  $x = 4$ .

- (b) Encontrar los puntos de corte de la parábola anterior con el eje horizontal, así como las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

**111** Las calificaciones de la primera prueba de un concurso-oposición se distribuyen normalmente, con media  $\mu = 4'2$  y desviación típica  $\sigma = 1'3$ .

- (a) Calcular el porcentaje de opositores que superan la primera prueba, si la calificación mínima necesaria es 5 puntos.
- (b) ¿Cuál debería ser la calificación mínima necesaria si se pretende que la primera prueba la supere el 60% de los opositores?

**112** Las temperaturas mínima y máxima de una determinada ciudad, medidas a lo largo de seis meses diferentes, son las siguientes:

Mínima( $x$ )	7	10	12	13	15	19
Máxima( $y$ )	16	17	19	19	21	25

Determinar la recta de regresión de  $y$  sobre  $x$ , y el coeficiente de correlación lineal. ¿Qué temperatura máxima cabe esperar cuando la mínima sea 14 grados?

#### MAYORES 2006.

113 Determinar los valores máximo y mínimo de la función  $z = 3x + 2y$  sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned}x + y &\leq 120 \\3x + y &\geq 150 \\x &\geq 0 \\y &\geq 0\end{aligned}$$

114 Hallar la ecuación de la recta tangente a la función

$$f(x) = \frac{1}{3 - \sqrt{x}}$$

en el punto de abscisa  $x = 4$ .

115 En una determinada ciudad, el 30% de las personas que forman la población activa se levanta antes de las 7 de la mañana. se eligen al azar 10 de estas personas. Calcular la probabilidad de que:

- (a) Como mínimo, 8 de ellas se levanten antes de las 7 de la mañana.
- (b) Exactamente 8 de ellas se levanten antes de las 7 de la mañana.

116 El número de personas que acuden a comprar en un día a 60 comercios elegidos al azar en una determinada localidad viene dado por la tabla siguiente:

Asistentes	$0 < x \leq 50$	$50 < x \leq 100$	$100 < x \leq 150$	$150 < x \leq 200$	$250 < x \leq 300$	$300 < x \leq 350$
N de comercios	8	12	15	10	9	6

- (a) Dibujar el histograma de frecuencias correspondiente.
- (b) Calcular la media, la varianza y la desviación típica de la distribución de frecuencias.
- (c) Hallar el porcentaje de comercios a los que acuden entre 100 y 300 personas al día.