1 Demostrar que una recta que pase por el origen corta a todas las curvas integrales de una ecuación homogénea con el mismo ángulo

2 Resolver las siguientes ecuaciones:
a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+4}{x-y-6}$; b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+4}{x+y-6}$; c) $(2x-2y)dx + (y-1)dy = 0$; d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y-1}{x+4y+2}$ e) $(2x+3y-1)dx - 4(x+1)dy = 0$

3 Resolver las siguientes ecuaciones mediante un cambio de la forma $y = zx^n$, que las haga de variables separables
a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2+3xy^2}{4x^2y}$; b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-xy^2}{2x^2y}$; c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-xy^2}{x+x^2y}$

4 Demostrar que la familia de curvas que cortan a las curvas integrales solución de la ecuación $y' = f(x,y)$ con un ángulo constante α, son soluciones de la ecuación

$$y' = \frac{f(x,y) - \tan\alpha}{1 - f(x,y)\tan\alpha}$$

Hallar las curvas que forman un ángulo igual a $\pi/4$ con

- todas las rectas que pasan por el origen.
- todos los circunferencias $x^2 + y^2 = c^2$.
- todas las hipérbolas $x^2 - 2xy - y^2 = c$

5 Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas:

$$a)\ \ y = x + ce^{-x}; \quad b)\ \ y^2 = ce^x + x + 1$$

6 Resolver las siguientes ecuaciones hallando un factor integrante:

- $(3x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$
- $(xy-1)dx + (x^2 - xy)dy = 0$
- $(x+2)\,\mathrm{sen}\,y\ dx + x\cos y\ dy = 0$
- $ydx + (2x - ye^y)dy = 0$
- $(y\log y - 2xy)dx + (x+y)dy = 0$
- $(x^3 + xy^3)dx + 3y^2dy$

7 Resolver las ecuaciones lineales:

- $xy' - 3y = x^4$
- $y' + y = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$
- $(x\log x)y' + y = 3x^3$
- $y' + y = 2xe^{-x} + x^2$
- $(2y - x^3)dx = xdy$
- $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 6xe^{x^2}$

8 Resolver las siguientes ecuaciones de Bernouilli:

$$a)\ \ xy' + y = x^4y^3; \quad b)\ \ xy^2y' + y^3 = x\cos x; \quad c)\ \ xdy + ydx = xy^2dx;$$

9 Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones, a partir de la solución particular que se da.

1. $x^2y'' + xy' - 4y = 0$. Solución particular: $y_1 = x^2$.
2. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$. Solución particular: $y_1 = x$.
3. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$. Solución particular: $y_1 = x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x$.
4. $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$. Solución particular: $y_1 = e^x$.
5. $xy'' - (x + n)y' + ny = 0$. $(n \in \mathbb{N})$.

10 La ecuación $x^2y'' + pxy' + qy = 0$ con p y q constantes es la llamada ecuación equidimensional de Euler. El cambio $x = e^z$ la reduce a una ecuación con coeficientes constantes. Aplicar el cambio propuesto y resolver:

- $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$
- $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$
- $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
- $x^2y'' + 2xy' + 3y = 0$

11 Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

1. $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$. Solución particular de la homogénea: $y_1 = x$.
2. $(1 - x)y'' + xy' - y = (1 - x)^2$.
3. $x^2y'' - 2xy' + 2y = xe^{-x}$.

12 Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

1. $y'' + 4y' + 4y = 10x^3e^{-2x}$
2. $y'' - 2y' + y = e^x$
3. $y'' + 4y' + 4y = 10x^3e^{-2x}$
4. $y'' - y = e^{-x}$
5. $y'' - 2y' - 3y = 6e^{5x}$
6. $y'' - y' + y = x^3 - 3x^2 + 1$
7. $y'' - 7y' + 12y = e^{2x}(x^3 - 5x^2)$
8. $y'' + 9y = 2 \operatorname{sen} 3x + 4 \operatorname{sen} x - 26e^{-2x} + 27x^3$

13 Las ecuaciones:

$$a)\quad m\frac{d^2x}{dt} + kx = 0, \qquad b)\ m\frac{d^2x}{dt} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad \text{y} \qquad c)\quad m\frac{d^2x}{dt} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t$$

determinan la posición de un cuerpo de masa m que se mueve bajo el efecto de un muelle de constante k (ecuación a)). La ecuación b) corresponde al caso en que existe rozamiento y la c) al caso en que tambien hay fuerzas exteriores al mecanismo.

Determinar la solución en cada caso.

14 Calcular la solución general del sistema $Y' = AY$, siendo A cada una de las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix};\ b)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{pmatrix};\ c)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix};\ d)\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};\ e)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix};\ f)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g)\ \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix};\ h)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix};\ i)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ j)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix};\ k)\ \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

15 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \ C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

obtener la solución de cada uno de los siguientes problemas de valores iniciales:

$$\begin{cases} Y' = AY + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \operatorname{sen} 5x \end{pmatrix} \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \begin{cases} Y' = BY - \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \begin{cases} Y' = CY + e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \begin{cases} Y' = DY \\ Y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

16 Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones:

$$a) \quad y^{4)} - 4y^{3)} + 12y^{2)} + 4y' - 13y = e^{2x} + e^{2x} \operatorname{sen} 3x; \quad b) \quad y^{5)} + 3y^{4)} + 3y^{3)} + y'' = 1 + e^{-x}$$

17 Obtener la solución general del sistema lineal

$$Y' = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \cos 3x \\ 1 + \operatorname{sen} 3x \end{pmatrix}$$