

1 Demostrar que $|Re\, z| + |Im\, z| \leq \sqrt{2}|z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

2 Encontrar las soluciones de $\bar{z}^2 = z^2$.

3 Representar cada uno de los siguientes conjuntos:

$$(a) |z - 1 + i| = 1, \quad (b) |z + i| \leq 3, \quad (c) Re(\bar{z} - i) = 2, \quad (d) |2z - i| = 4.$$

4 Demostrar que si $|z| < 1$ entonces $Im(1 - \bar{z} + z^2) < 3$.

5 Calcular el argumento de los siguientes números complejos: $\frac{i}{-2 - 2i}, \frac{-2}{1 + \sqrt{3}i}$.

6 Calcular las siguientes raíces en forma binómica y representarlas:

$$(2i)^{1/2}, (1 - \sqrt{3}i)^{1/2}, (-1)^{1/3}, 8^{1/6}, (-16)^{1/4},$$

donde $\sqrt{3}$ representa la raíz cuadrada positiva de 3.

7 Demostrar que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, entonces

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

para todo natural $n \geq 0$. Utilizar esa igualdad para demostrar la siguiente "identidad trigonométrica de Lagrange"

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})\theta]}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \quad \forall 0 < \theta < 2\pi.$$

8 Sea $z \neq 1$ una raíz n -ésima de la unidad. Demostrar que $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$.

9 Demostrar que si $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de un polinomio con coeficientes reales también lo es $\bar{z}$.

10 Suponiendo que $|z| = 1$ o $|w| = 1$ y $\bar{z}w \neq 1$ probar que

$$\left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right| = 1$$

11 Encontrar el máximo de $|z^n + a|$ cuando $|z| \leq 1$

12 Si los números complejos z_1, z_2 y z_3 satisfacen la relación

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

probar que $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$

13 Resolver cada una de las siguientes ecuaciones: (a) $e^z = -2$, (b) $e^z = 1 + \sqrt{3}i$, (c) $e^{2z-1} = 1$.

14 Demostrar que $|e^{z^2}| \leq e^{|z|^2}$.

15 Demostrar que $|e^{-2z}| < 1$ si, y sólo si, $Re\, z > 0$.

16 Determinar $Re\, e^{1/z}$ en términos de las coordenadas cartesianas de z .

17 Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\cos z = 2, \quad \sin z = \cosh 4, \quad \cosh z = 1/2, \quad \sinh z = i.$$

18 Calcular $\log e, \log i, \log(-1 + \sqrt{3}i), \operatorname{Log}(-ei), \operatorname{Log}(1 - i)$.

19 Demostrar que $\operatorname{Log}(1 + i)^2 = 2 \operatorname{Log}(1 + i)$, pero $\operatorname{Log}(-1 + i)^2 \neq 2 \operatorname{Log}(-1 + i)$.

20 Justificar la definición del símbolo $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ y probar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann son equivalentes a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

21 Escribir las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.

22 Demostrar que si $f(z)$ es una función analítica y una cualquiera de las funciones Ref , Imf , $|f|$ o $Argf$ es constante, entonces f es constante.

23 ¿Existe una función analítica cuya parte real es $u(x, y) = \sin x \sinh y$? En caso afirmativo calcularla y expresarla en función de z .

24 Calcular la determinación principal de la función arco tangente de z , determinar la región donde es analítica y calcular su derivada cuando exista.

25 Hallar el polinomio armónico más general de la forma

$$u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3.$$

Calcular una función $v(x, y)$ tal que $u(x, y) + iv(x, y)$ sea entera.

26 Sea Ω un abierto simétrico con respecto del eje real. Demostrar que f es analítica en Ω si, y sólo si, g es analítica en Ω , donde $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

27 Determinar en qué regiones del plano complejo son analíticas las siguientes funciones y calcular las derivadas correspondientes.

(a) $f(z) = \bar{z}$; (b) $f(z) = |z|$; (c) $f(z) = e^{e^z}$; (d) $f(z) = \cos \bar{z}$; (e) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$; (f) $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$.

¿Es la función del apartado (f) conforme en $z = 0$? ¿Cuáles son las imágenes respectivas de los ejes real e imaginario? ¿Con qué ángulo se cortan dichas imágenes?

28 Sean Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $u(x, y)$, $v(x, y)$ funciones armónicas en Ω . Bajo qué condiciones es armónica la función producto uv ? Demostrar que u^2 no puede ser armónica a menos que u sea constante. Para qué funciones analíticas f es $|f|^2$ armónica?

29 Calcular las siguientes integrales curvilíneas

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z}, \quad \int_{|z|=1} \frac{dz}{\bar{z}}, \quad \int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z}, \quad \int_{|z|=1} \left| \frac{dz}{z} \right|.$$

30 Calcular las siguientes integrales curvilíneas

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 1}, \quad \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz, \quad \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}, \quad \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)} dz.$$

31 Calcular

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz,$$

siendo $n \geq 1$ un natural arbitrario.

32 Sea γ la frontera del cuadrado determinado por las cuatro rectas $x = \pm 2$, $y = \pm 2$. Calcular

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2 + 8} dz, \quad \int_{\gamma} \frac{z}{2z + 1} dz, \quad \int_{\gamma} \frac{\cosh z}{z^4} dz.$$

33 Calcular las siguientes integrales:

(a) $\int_{\gamma} (z^3 + 3) dz$, donde γ es la mitad superior de la circunferencia unidad orientada positivamente.

(b) $\int_{\gamma} e^{1/z} dz$, donde γ es la circunferencia de radio 3 centrada en $1 + 5i$.

(c) $\int_{\gamma} z^2 (z-1)^{-1} dz$, donde γ es la circunferencia de centro 0 y radio 2.

(d) $\int_{\gamma} z^{-2} e^z dz$, donde γ es la circunferencia unidad.

(e) $\int_{\gamma} z^{-3} dz$, donde γ es el cuadrado de vértices $-1 - i$, $1 - i$, $1 + i$ y $-1 + i$.

(f) $\int_{\gamma} z^{-4} \sin z dz$, donde γ es la circunferencia unidad.

(g) $\int_{|z|=2} (z^2 + 2z - 3)^{-1} dz$

34 Sea f analítica en la bola $|z| < R$ con $R > 1$. Calcular $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2(\frac{\theta}{2}) d\theta$ en función de f y sus derivadas en el origen.

35 Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ ($a_k \in \mathbb{C}$). Calcular $\int_{|z|=r} z^{n-1} |p(z)|^2 dz$.

36 Sea $f(z)$ una función entera tal que para $|z| > R$ satisface $|f(z)| \leq M|z|^n$ donde n es un número natural y M y R son constantes reales positivas. Demostrar que $f(z)$ es un polinomio en z de grado menor o igual que n .

37 Sean $p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$ y γ una circunferencia de radio $r > |z_k|$ (es decir, una circunferencia que encierra todos los ceros de $p(z)$). Calcular

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z p'(z)}{p(z)} dz$$

en función de los ceros de $p(z)$.

38 Sea $p(z)$ un polinomio de grado n , $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ ($a_n \neq 0$). Calcular en función de los coeficientes de $p(z)$,

$$\int_{|z|=4} \frac{p(z)}{(z + i\pi)^{10}} dz$$

en los casos $n = 8$, $n = 9$ y $n = 10$.

39 Estudiar la convergencia de las siguientes series: (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(in)}{2^n}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen}(in)}{3^n}$ y (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\log n}$.

40 Calcular el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias: (a) $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-n}$;

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} n! n^{-n} z^n$ y (d) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-1} z^n$.

41 Encontrar un dominio en el que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z-1)^n}{n}$ sea analítica.

42 Determinar las series de Taylor centradas en cero de cada una de las siguientes funciones determinando en cada caso su radio de convergencia

$$e^z, \quad \cos z, \quad \operatorname{sen} z, \quad \operatorname{arctg} z, \quad \cosh z, \quad \operatorname{senh} z, \quad \operatorname{arctgh} z.$$

43 Calcular los desarrollos en serie de Taylor de las siguientes funciones en torno a los puntos indicados, especificando los correspondientes radios de convergencia: (a) e^z , $a = 1$; (b) $1/z$, $a = 1$; (c) $z^2 e^z$, $a = 0$; (d) $e^z \operatorname{sen} z$, $a = 0$; (e) e^{z^2} , $a = 0$ y (f) $(z-1)^{-1}(z-2)^{-2}$, $a = 0$.

44 Calcular los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Taylor de $\tan z$ en $a = 0$.

45 Calcular los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen de la función $f(z) = \log(\cos z)$.

46 Calcular los dos primeros términos no nulos y el radio de convergencia del desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen de la función $f(z) = \frac{z^2 - 1}{1 + \cos(\pi z)}$.

47 Encontrar las coronas de convergencia de las siguientes series de Laurent:

$$(a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n z^n; (b) \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n! + \sum_{n=-1}^{-\infty} 2^n z^n; (c) \frac{27}{35z^4} - \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n! \text{ y } (d) z + \sum_{n=-1}^{-\infty} n^{(-n)!} z^n.$$

48 1. Determinar la parte principal (es decir la que contiene las potencias negativas) del desarrollo en serie de Laurent de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ alrededor de

a) Un cero de orden k de $f(z)$.

b) Un polo de orden k de $f(z)$.

2. Probar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = C - P$$

en donde $f(z)$ es una función analítica dentro y sobre la curva simple cerrada γ excepto para un número finito de polos simples que se encuentran en el interior de γ . C es el número de ceros de $f(z)$ en el interior de γ (contando su multiplicidad) y P es el número de polos.

49 Clasificar las singularidades de la función

$$f(z) = \frac{(z-1)^2(z+3)}{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi z}{2}}$$

y calcular los residuos correspondientes

50 Suponiendo que $f \in H(D_2(0) \setminus \{0\})$ y que para cada natural $n \geq 0$ se verifica

$$\int_{|z|=1} z^n f(z) dz = 0,$$

demuéstrese que $z = 0$ es una singularidad evitable de $f(z)$.

51 Encontrar el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$ válido en la corona $1 < |z| < 2$.

52 Determinar el dominio de holomorfía y clasificar todas las singularidades de cada una de las siguientes funciones:

$$f(z) = \frac{z}{\operatorname{sen} z}, \quad g(z) = e^{\frac{1}{z^2-1}}, \quad h(z) = z \cos \frac{1}{z}.$$

53 Obtener los desarrollos en serie de Laurent de las siguientes funciones: (a) $f(z) = e^z + e^{\frac{1}{z^2}}$ en $|z| > 0$; (b) $f(z) = \frac{1}{z(z+R)}$ en $0 < |z| < R$; (c) $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$ en $0 < |z-1| < 2$.

54 Determinar el dominio de holomorfía y clasificar todas las singularidades de la función

$$f(z) = \frac{(z^2-1)(z-2)^3}{\operatorname{sen}^3(\pi z)}.$$

55 Halla los puntos singulares y determina su naturaleza:

1. $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{1+z^2}$

2. $f(z) = \frac{z-1}{(z^2-1)\operatorname{sen}(z)}$

56 Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_0^\infty \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx$	b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos \theta} d\theta$	c) $\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1} dx$
d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{x^2+2x+5} dx$	e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x - \cos 2}{x^2-4} dx$	f) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{x^2+1} dx$
g) $\int_0^\infty \frac{x^p}{(1+x)^2} dx$	h) $\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(1+x)^3} dx$	i) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)^2} dx$
j) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$	k) $\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx$	l) $\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^4} dx$

57 Calcular las siguientes integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx, \quad \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} \quad (a > 1), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

58 Calcular las siguientes integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{\sin(ax)}{x} dx \quad (a, b \in \mathbb{R}, a > 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx \quad (b > 0, a > 0)$$

59 Determinar las funciones enteras $f(z)$ para las que

$$f(z + w) = f(z)f(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

60 Demostrar que las únicas funciones enteras que verifican $f(z) = f(2z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ son las constantes.

61 (Teorema de Picard.) Demostrar que si $f \in H(\mathbb{C})$ y existen $\varepsilon > 0$ y $w \in \mathbb{C}$ tales que

$$|f(z) - w| \geq \varepsilon \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

entonces f es constante. Utilizar este hecho para concluir que la imagen de toda función entera no constante es densa en $\mathbb{C}$.

62 Sea f una función entera tal que

$$\operatorname{Im}(f(z)) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Probar que f debe ser constante.