

# Estadística Aplicada y Cálculo Numérico (Grado en Química)

Valeri Makarov

Dept. de Matemática Aplicada, U.C.M.

10/02/2015 – 29/05/2015

F.CC. Matemáticas, Desp. 420  
<http://www.mat.ucm.es/~vmakarov>  
e-mail: [vmakarov@mat.ucm.es](mailto:vmakarov@mat.ucm.es)

## Capítulo 3

# Elementos del cálculo de probabilidades

## Fórmulas del análisis combinatorio

**Problema 1:** a) ¿Cuántas matrículas de coche se puede formar?

Matrícula: 0123 XYZ. 10 números, supongamos 26 letras

$$\text{Num. Matrículas} = 10 * 10 * 10 * 10 * 26 * 26 * 26 \approx 176 \times 10^6$$

b) ¿Cuántas palabras XYZ se puede formar con las letras distintas?  
(en total 27 caracteres):

$$\text{Num. Palabras} = 27 * 26 * 25 = 17550$$

c) ¿Cuántas palabras distintas reordenando letras en la palabra  
RECTA?

$$\text{Num. Palabras} = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$$

Dado un conjunto

$$\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

vamos a definir diferentes combinaciones.

**a) Variaciones** de orden  $m$  son todos los subconjuntos de  $\Omega$  de  $m$  elementos.

*Diferentes:* en algún elemento o en orden

*Número total:*

$$V_{n,m} = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)$$

**Ejemplo 1:** Problema 1b

**Ejemplo 2:** ¿De cuántas formas se puede colocar dos objetos escogiéndolos de los cuatro distintos?

$$V_{4,2} = 4 * 3 = 12$$

Ejemplo: objetos A, B, C y D

*AB; AC; AD; BA; BC; BD; CA; CB; CD; DA; DB; DC*

**b) Permutaciones** son variaciones de todo el conjunto:

$$P_n = V_{n,n} = n!$$

Ejemplo 1: Problema 1c

Ejemplo 2: ¿De cuántas formas se puede colocar 3 objetos diferentes (A, B y C)?

$$P_3 = 3! = 6 \quad ABC; ACB; BAC; BCA; CAB; CBA$$

**c) Combinaciones** de orden  $m$  son todos los subconjuntos de  $\Omega$  de  $m$  elementos.

*Diferentes:* en algún elemento (**el orden no importa**)

*Número total:*

$$C_{n,m} = \frac{V_{n,m}}{P_m} = \binom{n}{m} \equiv \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

**Ejemplo:** ¿De cuántas formas se puede elegir dos de cuatro objetos distintos?

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2! * 2!} = 6$$

Objetos a, b, c, y d:

*ab; ac; ad; bc; bd; cd*

**Problema 7:** Una pandilla de 5 amigos está organizando un viaje de modo que en un coche deben ir 3 personas y en otro 2. ¿De cuántas formas distintas se pueden ir?

**Resolución:** Tenemos que ver cómo podemos colocar 2 amigos de los 5.

Por tanto:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2! * 3!} = 10$$

Combinaciones de los amigos a, b, c, d y e en el coche de dos:

*ab; ac; ad; ae; bc; bd; be; cd; ce; de*

## Espacio muestral; Sucesos

**Espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles

Ejemplo: Lanzamos un dado.

$$\text{Espacio Muestral} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Lanzando dos dados:

$$S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$$

**Suceso** es un subconjunto del espacio muestral (representaremos por letras mayúsculas  $A$ ,  $B$ , etc.)

Ejemplo: Obtención de un número par:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

## Operaciones con sucesos

**Suceso contrario:** El suceso contrario de  $A$  es un suceso  $\bar{A}$  que ocurre siempre cuando no ocurre  $A$ .

*Ejemplo:*  $A =$  "número par", entonces  $\bar{A} =$  "número impar".

**Suceso seguro:** El suceso seguro  $S$  es un suceso que ocurre siempre.

*Ejemplo:*  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

**Suceso imposible:** El suceso imposible  $\emptyset$  es un suceso que nunca ocurre.

**Unión (suma):** La unión de dos sucesos  $A$  y  $B$  es un suceso  $A \cup B$  que ocurre cuando al menos uno de los dos ocurre.

*Ejemplo:*  $A = 3$ ,  $B = \text{" número par"}$ , entonces  $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$ .

**Intersección (producto):** La intersección de dos sucesos  $A$  y  $B$  es un suceso  $A \cap B$  que ocurre cuando ocurren los dos a la vez.

*Ejemplo:*  $A = \text{" número menor que 5"}$ ,  $B = \text{" número par"}$ , entonces  $A \cap B = \{2, 4\}$ .

**Diferencia:** La diferencia de dos sucesos  $A$  y  $B$  es un suceso  $A - B$  que ocurre cuando ocurre el suceso  $A$  pero no ocurre el suceso  $B$ .

*Ejemplo:*  $A =$  "sacar par",  $B =$  "sacar múltiplo de 3". Entonces

$$A - B = \{2, 4, 6\} - \{3, 6\} = \{2, 4\}$$

Propiedad:

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

**Sucesos incompatibles:** Dos sucesos  $A$  y  $B$  son incompatibles si  $A \cap B = \emptyset$ .

*Ejemplo:*  $A = \{1, 3\}$ ,  $B =$  "número par".

Propiedad:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

# Concepto de la probabilidad

**Probabilidad como límite de frecuencias relativas** (Richard von Mises)

La frecuencia relativa de un suceso  $A$  al realizar  $n$  pruebas es

$$f(A) = \frac{n_A}{n}$$

donde  $n_A$  es el número de veces (frecuencia absoluta) que ocurre el suceso  $A$ .

Definición:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(A)$$

## Algunas propiedades de $f(A)$ (y de $P(A)$ )

- ▶  $0 \leq f(A) \leq 1$ .
- ▶  $f(S) = 1$     $f(\emptyset) = 0$
- ▶ Para dos procesos incompatibles  $A$  y  $B$ , la frecuencia relativa de su suma (unión) es:

$$f(A \cup B) = \frac{n_{A \cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = f(A) + f(B)$$

- ▶ Para  $m$  procesos incompatibles  $\{A_i\}_{i=1}^m$ , la frecuencia relativa de su suma (unión) es:

$$f\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m f(A_i)$$

## Propiedades básicas de la probabilidad

- ▶ A partir de  $A \cup \bar{A} = S$ ,  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ :

$$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Por lo tanto

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad P(\emptyset) = 0$$

- ▶ Si  $A \cap B = \emptyset$  (**dos sucesos incompatibles**)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- ▶ Si  $A \cap B \neq \emptyset$  (**dos sucesos compatibles**)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

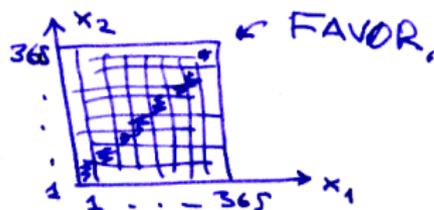
**Problema 16:** Hay 23 alumnos. ¿Cuál es la probabilidad de que **al menos 2** cumplan los años el mismo día?

① Caso 2 alumnos:

$x_1$  - cumpleaños ALUMNO 1

$x_2$  - cumpleaños ALUMNO 2

$x_{1,2} \in \{1, 2, \dots, 365\}$



$$P(x_1 = x_2) = \frac{\# \text{FAVORAB.}}{\# \text{TOTAL}} = \frac{365}{365^2} = \frac{1}{365}$$

② CASO 3 ALUMNOS:

Suceso  $A = (x_1 = x_2) \cup (x_1 = x_3) \cup (x_2 = x_3) \cup (x_1 = x_2 = x_3)$

$P(A) = ?$  SE PUEDE CALCULAR, PERO COMPLICADO

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

En muchas ocasiones es **más fácil calcular  $P(\bar{A})$**

Suceso  $\bar{A}$  = “Todos cumplen los años en días diferentes”

$$P(\bar{A}) = \frac{\# \text{ FAVORABLES}}{\# \text{ TOTALES}}$$

**# FAVORABLES** = “Elegir 23 días diferentes de los 365” =  $V_{365,23}$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{V_{365,23}}{365^{23}} = 1 - \frac{365 * 364 * \dots * (365 - 22)}{365^{23}}$$

$$P(A) = 1 - 1 * \left(1 - \frac{1}{365}\right) * \left(1 - \frac{2}{365}\right) * \dots * \left(1 - \frac{22}{365}\right) \approx 0,507$$

## Probabilidad condicionada

La probabilidad de un suceso  $A$  en el caso de que ya se haya cumplido otro suceso  $B$  se llama **probabilidad condicionada**:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Si

$$P(A|B) = P(A)$$

entonces los sucesos  $A$  y  $B$  son **independientes**

Para sucesos independientes

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

**Ejemplo:** Hallar la probabilidad de obtener 7 puntos lanzando 2 dados, sabiendo que en el primer dado apareció un número par.

**Resolución:** En total 36 resultados. Suceso  $A$  obtener 7 puntos:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \{(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1)\}$$

Suceso  $B$  = "número par"

$$P(B) = \frac{1}{2} \quad P(A \cap B) = \frac{\text{favor}}{\text{total}} = \frac{3}{36}$$

Por lo tanto:

$$P(A|B) = \frac{3/36}{1/2} = \frac{1}{6} = P(A)$$

Sucesos  $A$  y  $B$  son **independientes**

**Problema 13:** Se perforan pozos. La probabilidad de encontrar uno productivo  $p = 0,2$ . a) 1ero productivo es el tercero; b) entre 10 ninguno productivo.

**Sucesos independientes:** (p.e. pozos 1 y 2)  $P(B \cap C) = P(B)P(C)$

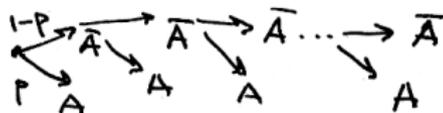
### Problema 13

$A$  = "pozo productivo"

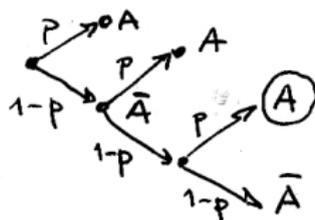
$\bar{A}$  = "pozo no productivo"

$P = P(A) = 0.2$

(b) 10 perforaciones  
no productivo



(a) 3ero productivo  
cadena:



$$P = (1-p)^2 p = 0.8^2 \cdot 0.2 = 0.128$$

$$\Rightarrow P = (1-p)^{10} = 0.107$$

## El teorema de Bayes

Dado 2 sucesos  $A$  y  $B$ , las probabilidades condicionadas:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{y} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

de donde obtenemos **la fórmula de Bayes**:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$P(A)$  y  $P(B)$  son las propiedades **a priori**

$P(B|A)$  es la propiedad **a posteriori**

**Problema 23:** Urna A contiene 2 bolas blancas + 8 negras. Urna B: 5 blancas + 4 negras. Lanzamos 2 dados. Si la suma  $S \leq 4$  sacamos una bola de la urna A, en caso contrario de la B.

(i) Probabilidad de que la bola sea de la A

① La probabi. de que la bola sea de la URNA A

$$P(A) = P(S=2) + P(S=3) + P(S=4)$$

$$\text{Total} = 36$$

$$P(S=2) = \frac{1}{36}$$

$$P(S=3) = \frac{2}{36}$$

$$P(S=4) = \frac{3}{36}$$

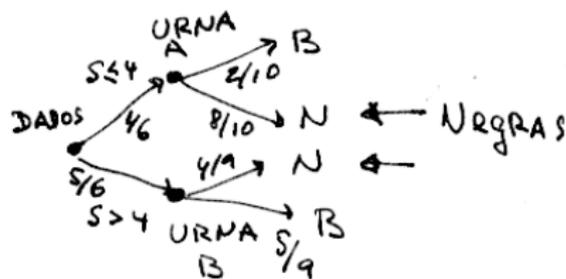
$$P(\text{sacamos de A}) = \frac{1+2+3}{36} = \frac{1}{6}$$

6	7				
5	6	7			
4	5	6	7	8	
3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5

(ii) Probabilidad de que la bola sea negra

(ii) la Probab. de que la Bola sea Negra

$$\begin{aligned}
 P(\text{Bola Negra}) &= \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{10} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{9} = \\
 &= \frac{2}{15} + \frac{10}{27} = \frac{18+50}{5 \cdot 3 \cdot 9} = \frac{68}{135}
 \end{aligned}$$



(iii) Si resulta que la bola es negra, ¿cuál es la probabilidad de que  $S \leq 4$ ? y ¿ $S = 3$ ?

(ii) Si sacamos una bola negra.  $P(S \leq 4 | \text{BOLA NEGRA})$   
la probab. de que sea de la urna A.

$$P(S \leq 4 | \text{Bola Negra}) = \frac{P(\text{BN} | S \leq 4) P(S \leq 4)}{P(\text{BN})} = \frac{8/10 \cdot 1/6}{68/135} = \frac{8 \cdot 135}{68 \cdot 60} \approx 0,265$$

Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)} \quad \left| \quad P(S=3 | \text{BN}) = \frac{P(\text{BN} | S=3) P(S=3)}{P(\text{BN})} = \frac{8/10 \cdot 1/12}{68/135} \approx 0,132$$