Problema 1: $\begin{cases} u'' + tu' + 2uu' = 0 \\ u(0) = u'(0) = 1 \end{cases}$

(a) $(*) \begin{cases} u' = v \\ v' = -v(t+2u) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sean $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $f(t,x) = \begin{pmatrix} v \\ -v(t+2u) \end{pmatrix}$, $T > 0$, $J = [0,T]$

$f: J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^2$ uniformemente en $t \in J$.

En efecto f es continua y diferenciable:

$$Df = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2v & -(t+2u) \end{pmatrix}$$

$\left|\frac{\partial f_1}{\partial u}\right| = 0$, $\left|\frac{\partial f_1}{\partial v}\right| = 1$, $\left|\frac{\partial f_2}{\partial u}\right| = 2|v|$, $\left|\frac{\partial f_2}{\partial v}\right| = |t+2u| \leq T + 2|u|$

Entonces $\forall x_0 \in \mathbb{R}^2 \ \exists \varepsilon > 0$ tal que $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leq M < \infty$ en $J \times \overline{B}(x_0, \varepsilon)$. Aplicando la proposición del Capítulo 2 $\Rightarrow$ localmente Lipschitz.

Por el teorema de Picard-Lindelöf (local) $\exists\, \delta > 0$ $(\delta \leq T)$ tal que el P.V.I. $(*)$ tiene una única solución $x(t; x_0)$ definida para $t \in [0, \delta]$.

La solución se puede prolongar (el teorema de prolongabilidad) hasta obtener la solución maximal que:

1) o bien $x_m(t)$ está globalmente definida en $t \in [0, +\infty)$

2) o bien $x_m(t)$ definida en $t \in [0, T_{max})$, $\lim_{t \to T_{max}} \|x\| = \infty$.

Por lo tanto existe una única solución $x(t)$ (y obviamente $u(t)$) allá donde esté definida.

(b)

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds$$

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} -v(s+2u(s))\, dS$$

$$\boxed{(u_0(t), v_0(t)) = (1, 1)}$$

$$u_1(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t \; ; \; v_1(t) = 1 - \int_0^t (s+2)ds = 1 - 2t - \frac{t^2}{2}$$

$$\boxed{(u_1(t), v_1(t)) = (1+t, 1-2t-t^2/2)}$$

$$u_2(t) = 1 + \int_0^t (1 - 2s - \tfrac{s^2}{2})ds = 1 + t - t^2 - t^3/6$$

$$v_2(t) = 1 + \int_0^t (-1 + \tfrac{s^2}{2} + 2s)(2+3s)ds = 1 + \int_0^t (-2 + s^2 + 4s - 3s + \tfrac{3}{2}s^3 +$$

$$+ 6s^2)ds = 1 + \int_0^t [-2 + s + 7s^2 + \tfrac{3}{2}s^3]ds = 1 - 2t + \frac{t^2}{2} + \frac{7t^3}{3} + \frac{3t^4}{8}$$

$$\boxed{(u_2(t), v_2(t)) = \left(1 + t - t^2 - \frac{t^3}{6}, 1 - 2t + \frac{t^2}{2} + \frac{7t^3}{3} + \frac{3t^4}{8}\right)}$$

c) $\begin{cases} v' = -v(t+2u) \\ v(0) = 1 \end{cases} \rightarrow v(t) = v_0 e^{-\int_0^t (s + 2u(s))ds}$ (como ec. lineal)

$v_0 = 1$

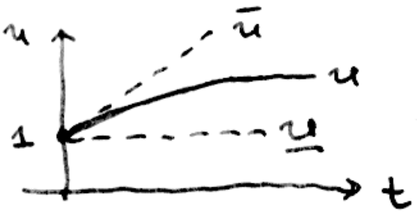
entonces $v(t) = e^{-\int_0^t (s+2u(s))ds} > 0$ (como exp > 0)

Luego $u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds = 1 + \int_0^t v(s)ds \geq 1$

(como $v(t) > 0$)

<u>Por lo tanto</u>: $u(t) \geq 1$, $v(t) > 0$ alla donde estén definidas

d) Por el c) $v(t)(t + 2u(t)) > 0 \Rightarrow v' < 0$. Es decir $u''(t) < 0$ $(u'(t) > 0)$. Entonces $u(t)$ es una función creciente cóncava hacia arriba. Por lo tanto $u(t)$ no puede explotar:



$$1 = \underline{u}(t) \leq u(t) \leq \bar{u}(t) = 1 + t$$

(sub y super soluciones)

Super: $0 < v(t) \leq 1$ $\left(\text{por } v = e^{-\int_0^t (s+2u)ds} = e^{-a(t)} \quad a \geq 0\right)$

$\Rightarrow u' \leq 1 \Rightarrow u(t) - u(0) \leq t \Rightarrow u(t) \leq 1 + t$

<u>Por lo tanto</u>: $(u(t), v(t))$ No explotan en tiempo finito

usando el a) $\Rightarrow$ $u(t)$ está globalmente definida en $t \in [0, +\infty)$

Problema 2

$$\begin{cases} u_1' = -2u_1 \\ u_2' = -3u_1 + u_2 \end{cases}$$

ⓐ Esbozar el diagrama de fase

$u' = Au$ donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

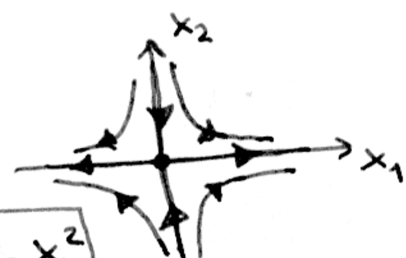
Buscamos los autovalores:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \{1, -2\}$$

Si hacemos el cambio: $u = Px \rightarrow x' = \underbrace{P^{-1}AP}_{J}x$

donde $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$

Es decir $x_1(t) = x_{10}e^t$
$x_2(t) = x_{20}e^{-2t}$



Es una silla

las trayectorias: $\boxed{x_2 = \dfrac{x_{20}}{e^{2t}} = \dfrac{x_{20}x_{10}^2}{x_1^2}}$

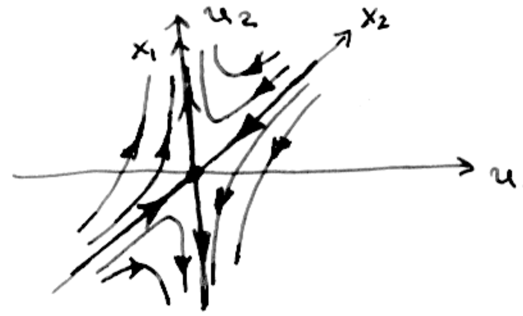
La matriz de Paso: $PJ = AP$ $\quad P = [p_1, p_2]$

$AP = [p_1\ p_2]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = [p_1, -2p_2]$

$$\begin{cases} (A - I)p_1 = 0 \\ (A + 2I)p_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} p_1 = 0 \Rightarrow p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y por lo tanto $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Es decir $\begin{cases} u_1 = x_2 \\ u_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$ $\qquad$ eje x_1: $x_2 = 0 \rightarrow u_1 = 0$
eje x_2: $x_1 = 0 \rightarrow u_1 = u_2$



(b) Encontrar la solución particular

$$u = P e^{Jt}\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = P e^{Jt} P^{-1}\begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{(\operatorname{adj} P)^T}{\det P} \qquad \operatorname{adj} P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det P = -1$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{t} & e^{t} \\ e^{-2t} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ e^{-2t}-e^{t} & e^{t} \end{pmatrix}$$

$$u_1(t) = u_{10}e^{-2t}$$

$$u_2(t) = (e^{-2t}-e^{t})u_{10} + e^{t}u_{20} \qquad (1,-1) \Rightarrow \begin{cases} u_1(t) = e^{-2t} \\ u_2(t) = e^{-2t} - 2e^{t} \end{cases}$$

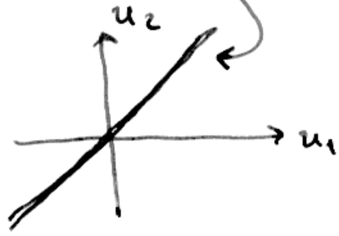
(c) $\|u(t)\| \longrightarrow 0 \Rightarrow$ estamos en el autoespacio estable.

Es decir si $u_{10} = u_{20} = a$ entonces $u_1(t) = a e^{-2t}$

$$u_2(t) = a e^{-2t}$$

de donde $\|u\| = \sqrt{2}\,|a|\,e^{-2t} \longrightarrow 0$ si $t \to \infty$

Por lo tanto $W^s = \{(a,a) : a \in \mathbb{R}\}$



Problema 3

$$t^2 u'' - 3tu' + 3u = t^4 e^t \qquad t>0$$

ⓐ Solución general

1) Homogénea: $t^2 u'' - 3tu' + 3u = 0$

solución particular: $u_1 = \alpha + \beta t \rightarrow u_1' = \beta$, $u_1'' = 0$

$$-3t\beta + 3\alpha - 3\beta t = 0 \implies \alpha = 0, \beta = 1$$

$$\boxed{u_1(t) = t}$$

2da solución linealm. independ. buscamos: $u_2 = b(t) u_1$

$u_2 = bt$

$$\begin{cases} u_2' = b' t + b \\ u_2'' = b'' t + 2b' \end{cases}$$ sustituimos:

$$t^2(b''t + 2b') - 3t(b't + b) + 3bt = 0$$

$$t^3 b'' + b'(2t^2 - 3t^2) = 0$$

Denotamos $b' = v \rightarrow t^3 v' - t^2 v = 0$

$$v' = \frac{1}{t} v \implies v = v_0 e^{\int \frac{1}{t}} = v_0 t$$

$v_0 \equiv 1$ (por buscar una solución)

$b' = t \rightarrow b = b_0 + \frac{t^2}{2}$ $\quad b_0 \equiv 0$ (t esta incluida en u_1)

Por lo tanto: $\boxed{u_2(t) = \frac{t^3}{3}}$

El Sist. Fundamental de Soluciones: $\boxed{\{t, t^3\}}$

de donde la solución general del Pr. Homogéneo:

$$\boxed{u_H = C_1 t + C_2 t^3}$$

2) Completa: Metodo de Variación de Constantes

$$u(t) = C_1(t) t + C_2(t) t^3$$

$$u' = \underbrace{C_1' t + C_2' t^3}_{=0} + C_1 + 3t^2 C_2$$

$$u'' = c_1' + 3t^2c_2' + 6t\,c_2$$

$$t^2(c_1' + 3t^2c_2') + \underline{6t^3c_2} - \underline{3tc_1} - \underline{9t^3c_2} + \underline{3c_1t} + \underline{3c_2t^3} = t^4e^t$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} c_1' + c_2't^2 = 0 \\ c_1' + 3t^2c_2' = t^2e^t \end{cases} \Rightarrow \quad 2t^2c_2' = t^2e^t \rightarrow c_2' = \frac{1}{2}e^t$$

$$c_1' = -t^2c_2' = -\frac{1}{2}t^2e^t$$

$$C_2 = C_{20} + \frac{1}{2}e^t$$

$$C_1 = C_{10} - \frac{1}{2}\int t^2e^t = C_{10} - \frac{1}{2}\left[t^2e^t - 2\int te^t\right] = C_{10} - \frac{1}{2}t^2e^t +$$

$$+ te^t - \int e^t = C_{10} + e^t\left[-\frac{t^2}{2} + t - 1\right]$$

$$u = C_{10}t + C_{20}t^3 + e^t\left[-\frac{t^3}{2} + t^2 - t + \frac{1}{2}t^3\right]$$

La solución general:

$$\boxed{u(t) = C_{10}t + C_{20}t^3 + te^t(t-1)}$$

(b) Solución particular $(u(1), u'(1)) = (0,0)$

$$u(1) = C_{10} + C_{20} = 0 \quad \rightarrow \quad C_{20} = -C_1$$

$$u' = C_{10}(1 - 3t^2) + e^t(t(t-1) + 2t - 1)$$

$$u'(1) = -C_{10}2 + e = 0 \quad \rightarrow \quad C_{10} = \frac{e}{2}$$

$$u(t) = \frac{e}{2}t(1 - t^2) + te^t(t-1)$$

$$\boxed{u(t) = t(t-1)\left(e^t - \frac{e(1+t)}{2}\right)}$$

Problema 4

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{3} k!\,t^k A^k \qquad \text{La forma de Jordan?}$$

Sea P una matriz de paso. Entonces

$$u' = Au \;,\; u = Px \;\rightarrow\; x' = \underbrace{P^{-1}AP}_{=J \text{ la matriz de Jordan}} x$$

$$\boxed{A = PJP^{-1}}$$

Por un lado: $e^{PJP^{-1}t} = P e^{Jt} P^{-1} =$

$$= P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!}\right)P^{-1}$$

Por otro lado:

$$\sum_{k=0}^{3} k!\,t^k (PJP^{-1})^k = PIP^{-1} + t(PJP^{-1}) + 2!t^2 PJ^2P^{-1} + 3!t^3 PJ^3P^{-1}$$

Igualando

$$I + tJ + \frac{t^2}{2!}J^2 + \frac{t^3}{3!}J^3 + \dots = I + tJ + 2!t^2 J^2 + 3!t^3 J^3$$

Igualando los terminos con las mismas potencias de t:

t^1: $J = J$

t^2: $(\frac{1}{2} - 2)J^2 = 0$

t^3: $(\frac{1}{6} - 6)J^3 = 0$

t^4: $J^4 = 0$

$\vdots$

Por lo tanto obtenemos:

$$J^n = 0 \quad \text{para } n \geq 2$$

$J = (0)$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ satisfacen esta ecuación.

(Aquí se supone que si A tiene autovalor $\emptyset$ de multiplicidad m, entonces, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times m}$)

Es decir A no es diagonalizable.