Problema 1

$$u'' = -e^{-u} + e^{-2u}$$

ⓐ Diagrama de fases

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = e^{-2u} - e^{-u} \end{cases}$$

Puntos de equilibrio: $\bar{v} = 0$, $e^{-2\bar{u}} = e^{-\bar{u}} \Rightarrow \bar{u} = 0$

un único p. de equil. $(0,0)$

Energía: $V(u) = \dfrac{e^{-2u}}{2} - e^{-u}$

$H = \dfrac{v^2}{2} + V(u) = H_0$. $\quad V' = -e^{-2u} + e^{-u}$; $V'(\bar{u}) = 0$

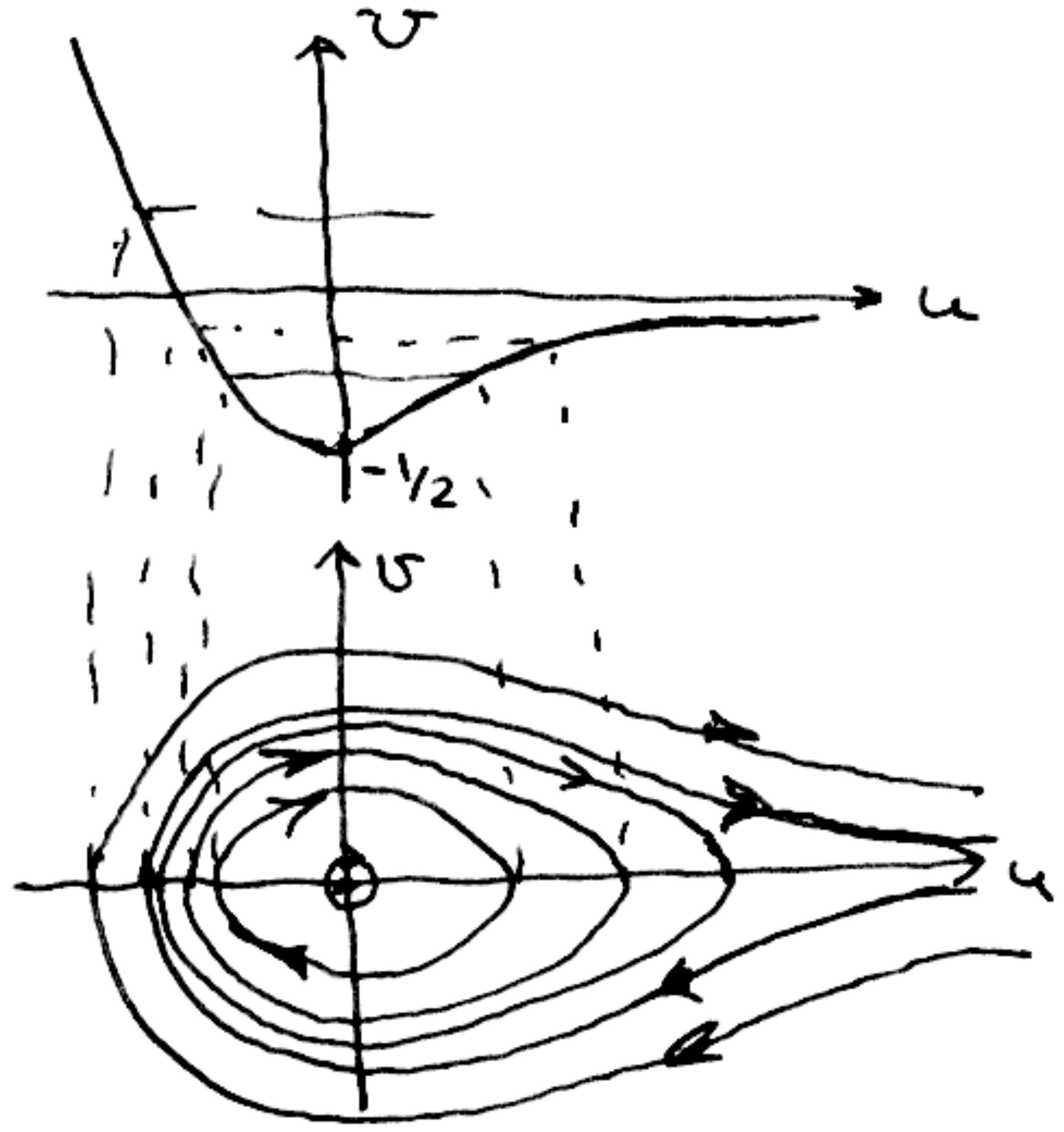
$V'' = 2e^{-2u} - e^{-u}$; $V''(0) = 1 > 0$

$\bar{u} = 0$ es un mínimo

Si $u \to \infty$ $V(u) \uparrow 0$

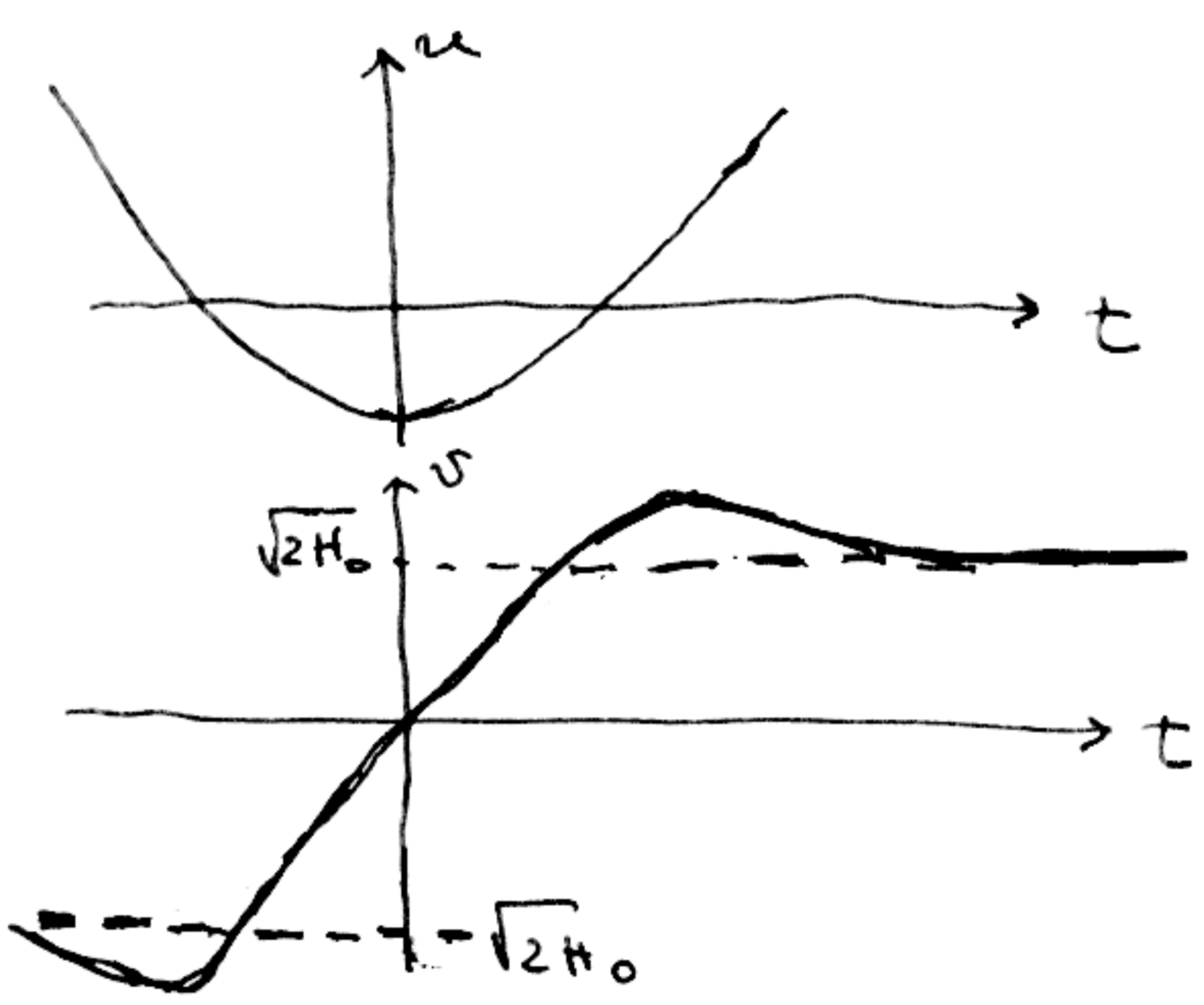
Si $u \to -\infty$ $V(u) \to \infty$

$V(0) = -\dfrac{1}{2}$



Si $H_0 < 0$ entonces las trayectorias son periódicas.

ⓑ Comportamiento



Si $H_0 \geq 0$ No son periodicas

para $t \to \pm\infty$ $u(t) \to +\infty$

luego $V(u) \to 0$ y

$v^2 \to 2H_0$ (CONSTANTE

Problema 2

$$\begin{cases} u' = Au + B \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

MÉTODO I

1 Problema Homogeneo: $u' = Au$

a) autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \{1, -1\}$$

b) matriz de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

c) matriz de Paso

$$u = Px \qquad Px' = APx \rightarrow x' = P^{-1}APx = Jx$$

$AP = PJ$. Sea $P = [p_1, p_2]$ ($p_{1,2}$ autovectores)

$$A[p_1\ p_2] = [p_1\ p_2]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = [p_1, -p_2]$$

$$(A - I)p_1 = 0, \quad (A + I)p_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} p_1 = 0 \Rightarrow p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \det P = 1, \ \operatorname{adj} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Matriz fundamental de soluciones:

$$\Phi = e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} & -e^{t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t} - e^{t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

e) Solución general del Prob. Homogéneo:

$$u = \Phi C$$

2 Problema completo

a) Variación de constantes: $u' = \Phi' C + \Phi C' = A\Phi C + B$

$\Phi C' = B \quad \rightarrow C' = \Phi^{-1} B \quad = C_0 + \int_0^t \Phi^{-1} B\, ds$

b) inversa de Φ

$\det\Phi = 1 \qquad \operatorname{adj}\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{t}-e^{-t} & e^{t} \end{pmatrix} \quad \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{t}-e^{-t} \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}$

c) Integral

$$I = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-s} & e^{s}-e^{-s} \\ 0 & e^{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2s} \\ 0 \end{pmatrix} ds = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{s} \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} e^{t}-1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) Solución final: $u = \Phi C_0 + \Phi \int_0^t \Phi^{-1} B\, ds$

$C_0 = u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$u = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t}-e^{t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t}-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}-e^{t}+e^{-t}-e^{t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{u = \begin{pmatrix} e^{2t}-2e^{t}+e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}}$$

MÉTODO II

$$\begin{cases} u_1' = u_1 - 2u_2 + e^{2t} \\ u_2' = -u_2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u_1(0) = 0 \\ u_2(0) = 1 \end{array}$$

$u_2(t) = e^{-t}$ sustituimos en la 1era ecuación

$$u_1' = u_1 - 2e^{-t} + e^{2t}$$

$u_1 = c\,e^{t}$ (solución general del Pr. Homogéneo)

$c' e^{t} = -2e^{-t} + e^{2t} \Rightarrow c' = -2e^{-2t} + e^{t}$

$c = c_0 + e^{-2t} + e^{t}$

$u_1(t) = c_0 e^{t} + e^{-t} + e^{2t}$

$u_1(0) = c_0 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow c_0 = -2$

$$\boxed{\begin{aligned} u_1(t) &= e^{2t} - 2e^{t} + e^{-t} \\ u_2(t) &= e^{-t} \end{aligned}}$$

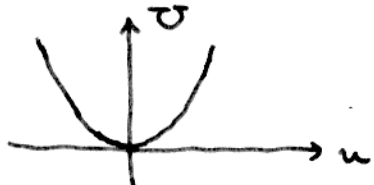
Problema 3

$$(*)\begin{cases} -u'' = u^3 & x \in (0,L) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \qquad L>0$$

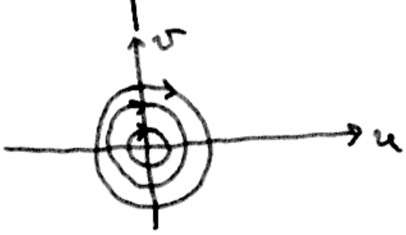
existe una única solución

Demostración:

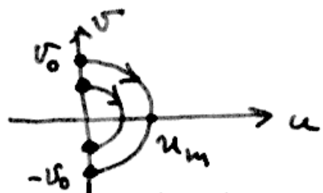
$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -u^3 \end{cases} \qquad H = \frac{v^2}{2} + \frac{u^4}{4} = H_0$$



Todas las trayectorias son curvas cerradas (soluciones periodicas)

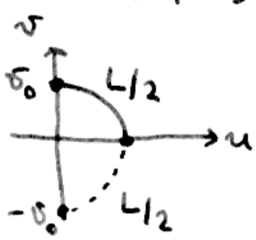


Las trayectorias que podrian verificar las condiciones de contorno y $u(x)>0$



Sea u_m el máximo que alcanza la trayectoria con $(0,v_0)$. Entonces $\quad H_0 = \frac{v_0^2}{2} = \frac{u_m^4}{4}$

Por simetria la trayectoria tarda a recorrer el arco de $(0,v_0) \to (u_m,0)$ lo mismo que de $(u_m,0)$ hasta $(0,-v_0)$



Por lo tanto la solución del $(*)$ es equivalente a

$$(**)\begin{cases} u' = \sqrt{2H_0 - \frac{u^4}{2}} \\ u(0) = 0 \ , \ u(\frac{L}{2}) = u_m \end{cases} \qquad 2H_0 = \frac{u_m^4}{2}$$

Es decir si $(**)$ tiene una única solución entonces $(*)$ tiene una única solución.

$$u' = \frac{u_m^2}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{u}{u_m}\right)^4} \Rightarrow \frac{u}{u_m} = s \Rightarrow \begin{cases} s' = \frac{u_m}{\sqrt{2}}\sqrt{1-s^4} \\ s(0)=0 \ , \ s(\frac{L}{2}) = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} = \frac{u_m}{\sqrt{2}}\frac{L}{2}$$

De este modo: Si $0 < \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} < \infty$ entonces existe un único valor $u_m = \frac{2\sqrt{2}}{L} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}$ que corresponde a una solución $\Rightarrow$ única solución del (*)

$s = 1-x \quad \longrightarrow \quad s^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 \qquad ds = -dx$

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$$\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} = \int_1^0 \frac{-dx}{\sqrt{x(4-6x+4x^2-x^3)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{g(x)}}$$

$g(x) = 4 - 6x + 4x^2 - x^3$

$g(0) = 4$, $g(1) = 4-6+4-1 = 1$, $g' = -6 + 8x - 3x^2 = 0$

$g(x)$ No tiene extremos. $\qquad x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot 18}}{-6}$

Entonces $\min\limits_{x\in[0,1]} g(x) = 1$

Por lo tanto $\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2$

y (como $\frac{1}{\sqrt{1-s^4}} > 0$) es obvio $\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} > 0$

Finalmente: $0 < \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} \leq 2$

Problema 4

$$u'' - u^p = 0 \qquad u(0) = u_0 > 0 \qquad p > 0$$
$$u'(0) = 0$$

(1) <u>$u(t)$ es creciente</u>

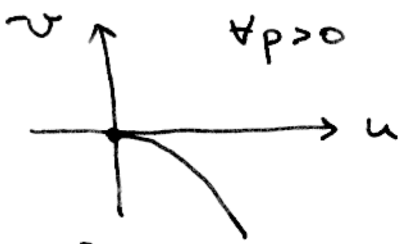
$$\begin{cases} u' = v \\ v' = u^p \end{cases}$$

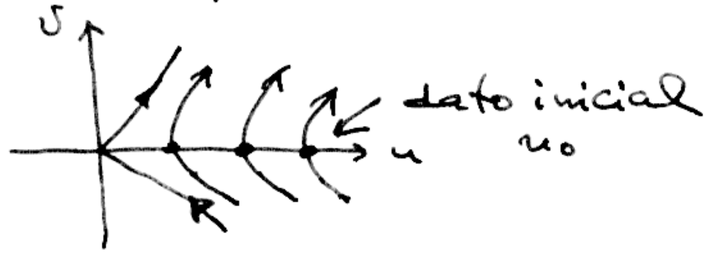
$$\boxed{H = \frac{v^2}{2} - \frac{u^{p+1}}{p+1} = -\frac{u_0^{p+1}}{p+1}}$$

Como $u_0 > 0$ y $u(t) \in C^1$ entonces $\exists \delta > 0$ t.q. $u(t) > 0$ si $t \in [0, \delta)$ en este intervalo $v' > 0 \Rightarrow v(t) \geq 0$

Supongamos que $\exists\, t^* > 0$ t.q. $u(t^*) = 0$ entonces: $\frac{v^2(t^*)}{2} = -\frac{u_0^{p+1}}{p+1} < 0$

CONTRADICCIÓN! Por lo tanto $u(t) > 0$ allá donde existe. Entonces $v' > 0$ para $t > 0 \Rightarrow v(t) > 0 \Rightarrow u' > 0$ $(t \in [0, T))$. Es decir $u(t)$ es creciente





(2) <u>Demostrar $p \leq 1$ $u(t)$ esta globalmente definida $t \in [0, +\infty)$</u>

$p = 1$ el Problema es lineal $\Rightarrow u(t)$ globalmente definida.

Sea $p < 1$. El P.V.I. corresponde a:

$$\begin{cases} u' = \sqrt{\frac{2}{p+1}} \sqrt{u^{p+1} - u_0^{p+1}} \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Supersolución:

$$\begin{cases} \bar{u}' = \sqrt{\frac{2}{p+1}}\sqrt{\bar{u}^{p+1}} \\ \bar{u}(0) = u_0 \end{cases}$$

Comprobemos $\quad \bar{u}' = \sqrt{\frac{2}{p+1}}\sqrt{\bar{u}^{p+1}} > \sqrt{\frac{2}{p+1}}\sqrt{\bar{u}^{p+1} - u_0^{p+1}}$

$u_0^{p+1} > 0 \quad$ ok.

$u(0) \leq \bar{u}(0) \quad$ ok.

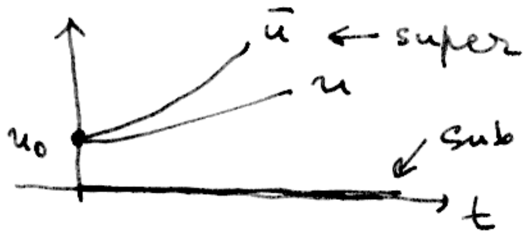
Por el lema de sub/supersoluciones:

$u(t) < \bar{u}(t) \quad t > 0 \quad$ (además sabemos que $u(t) \geq 0$)

$$\int_{u_0}^{\bar{u}} s^{-\frac{p+1}{2}} ds = \sqrt{\frac{2}{p+1}}\, t$$

$$\frac{1}{1-\frac{p+1}{2}} s^{-\frac{p+1}{2}+1} \Big|_{u_0}^{\bar{u}} = \frac{2}{1-p}\left[\bar{u}^{\frac{1-p}{2}} - u_0^{\frac{1-p}{2}}\right] = \sqrt{\frac{2}{p+1}}\, t$$

$$\bar{u} = \left[u_0^{\frac{1-p}{2}} + \frac{1-p}{2}\sqrt{\frac{2}{p+1}}\, t\right]^{\frac{2}{1-p}}$$ solución definida $[0,+\infty)$

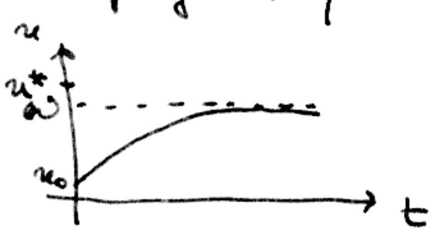


Por lo tanto $u(t)$ está globalmente definida en $t \in [0,+\infty)$.

③ <u>$p > 1$, explota</u>

Observemos que $\forall u^* > u_0 \quad \exists\, t^*$ t.q. $u(t^*) = u^*$.

Supongamos que $\exists\, u^* > u_0$ t.q. $u(t)$ No alcanza u^*



Es decir $u(t) \longrightarrow \omega > u_0$ ($u(t)$ es creciente)

ENTONCES: $v(t) = u'(t) \to 0$ y

$$\frac{\omega^{p+1}}{p+1} = \frac{u_0^{p+1}}{p+1} \Rightarrow \omega = u_0.$$ CONTRADICCIÓN

Sea $\begin{cases} \underline{u}' = \sqrt{\frac{1}{p+1}}\, \underline{u}^{\frac{p+1}{2}} \\ \underline{u}(t^*) = u^* \end{cases}$

$$\sqrt{\frac{1}{p+1}}\, \underline{u}^{\frac{p+1}{2}} = \underline{u}' < \sqrt{\frac{2}{p+1}} \sqrt{\underline{u}^{p+1} - u_0^{p+1}}$$

$$\underline{u}^{p+1} < 2\underline{u}^{p+1} - 2u_0^{p+1}$$

$$\underline{u}^{p+1} > 2u_0^{p+1} \to \underline{u} > u_0\, 2^{\frac{1}{p+1}}$$

Sea $u^* = 2^{\frac{1}{p}} u_0$

por lo anterior $\exists\, t^*$ tal que $u(t^*) = u^*$.

Entonces $\underline{u}(t)$ es subsolución del problema

$$\begin{cases} u' = \sqrt{\frac{2}{p+1}} \sqrt{u^{p+1} - u_0^{p+1}} \\ u(t^*) = u^* \end{cases}$$

y por el lema: $u(t) > \underline{u}(t)$ para $t > t^*$.

$$\underline{u} = \frac{1}{\left[\frac{1}{u_0^{\frac{p-1}{2}}} - \frac{p-1}{2}\frac{1}{p+1}t\right]^{\frac{p-1}{2}}}$$ explota

en $T = \dfrac{(p+1)2}{(p-1)\, u_0^{\frac{p-1}{2}}}$ entonces $u(t)$ explota en $t^* < T_{exp} < T + t^*$ ∎